ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 275 апрель 2002

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.2

Д.Д. Ахмедова, О.А. Змеев, А.Ф. Терпугов

ОПТИМИЗАЦИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ С УЧЁТОМ РАСХОДОВ НА РЕКЛАМУ

Решается задача об оптимальном во времени распределении расходов на рекламу. Строится стратегия рекламной программы в зависимости от условий эффективности рекламы. Получены выражения для ковариаций капитала и числа клиентов страховой компании.

В настоящее время вызывают интерес математические модели актуарной математики, изучающей различные ас-пекты страхового дела. В актуарной математике уже существует классическая модель страховой компании, где не учитываются многие факторы. В [1] нами была рассмотрена модель с учетом расходов на рекламу, найдены основные характеристики капитала компании и условия эффективности рекламы в случае, когда расходы на рекламу пропорциональны капиталу. Теперь же мы определим, как меняются характеристики капитала и число клиентов в зависимости от рекламной стратегии компании, а также рассмотрим задачу оптимизации рекламной компании в случае, когда доля денег, выделяемых на рекламу, меняется со временем.

Математическая модель и постановка задачи

Будем считать, что в момент времени t состояние страховой компании характеризуется её капиталом $S(t)$ и числом застрахованных клиентов $k(t)$. Количество денег, выделяемых на рекламу, будет характеризоваться величиной $\alpha(t)$, так что на интервале времени $[t, t+\Delta t]$ на рекламу выделяется $\alpha(t)S(t)\Delta t$ денег и $0 \le \alpha(t) \le \alpha_0$.

В [1] подробно описана модель страховой компании и получена система дифференциальных уравнений, описывающая состояние страховой компании в среднем:

$$\frac{dM\{S(t)\}}{dt} = a\lambda_0 + \alpha(t)(\lambda_1 a - 1)M\{S(t)\} + (c\mu_2 - b\mu_1)M\{k(t)\}, \quad (1)$$
$$\frac{dM\{k(t)\}}{dt} = \lambda_0 + \lambda_1\alpha(t)M\{S(t)\} - \mu M\{k(t)\}.$$

Смысл входящих сюда параметров описан в [1].

Рассмотрим теперь следующую задачу: пусть страховая компания начинает свою работу в момент времени $t=0$ и она хочет провести рекламную программу таким образом, чтобы к концу рассматриваемого промежутка времени $[0,T]$ её капитал стал максимальным. Определим критерий оптимальности следующим образом:

$$\frac{M\{S(T)\} - S_0}{\sqrt{D\{S(T)\}}} \Rightarrow \max.$$

Максимум ищется по виду $\alpha(t)$, $0 \le t \le T$ с учетом ограничений $0 \le \alpha(t) \le \alpha_0$; S_0 – капитал компании в начальный момент времени. Заметим, что это одна из постановок задач на оптимизацию рекламной деятельности.

Решение задачи

Система уравнений для ковариаций капитала и числа клиентов компании

Для решения задачи разделим рассматриваемый промежуток времени $[0,T]$ на три $[0,T_0]$, $[T_0,T_1]$ и $[T_1,T]$, причем каждому из промежутков соответствует своё значение $\alpha(t)$:

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, 0 \le t \le T_0, \\ \alpha_0, T_0 \le t \le T_1, \\ 0, T_1 \le t \le T. \end{cases}$$

Естественно, значение средних и дисперсий для капитала и числа клиентов будут различны в зависимости от промежутка. Система относительно средних капитала и числа клиентов уже получена. Выведем систему дифференциальных уравнений для ковариаций капитала и числа клиентов. Имеем:

$$S(t+\Delta t) = S(t) + \Delta S(t) - \alpha(t)S(t)\Delta t,$$
$$D\{S(t)\} = M\{S^2(t)\} - M^2\{S(t)\},$$
$$\frac{dD\{S(t)\}}{dt} = \frac{dM\{S^2(t)\}}{dt} - \frac{dM^2\{S(t)\}}{dt}.$$

Обозначим $M\{\xi^2\}=a_2$, $M\{\eta^2\}=b_2$, $M\{\zeta\}=c_2$. Тогда

$$\frac{dM\{S^2(t)\}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M\{S^2(t+\Delta t)\} - M\{S^2(t)\}}{\Delta t};$$

$$S^2(t+\Delta t) = S^2(t) + \Delta^2 S(t) + 2S(t)\Delta S(t) - 2\alpha(t)S^2(t)\Delta t - 2\alpha(t)\Delta S(t)S(t) + o(\Delta t).$$

Ограничиваясь членами с Δt, запишем выражение для $M\{S^2(t+\Delta t)\}$. Имеем

$$M\{S^2(t+\Delta t)\} = M\{S^2(t)\} + 2\lambda_0 aM\{S(t)\}\Delta t + (b_2\mu_1 + c_2\mu_2)M\{k(t)\}\Delta t + a_2(\lambda_0 + \lambda_1\alpha M\{S(t)\})\Delta t + 2(c\mu_2 - b\mu_1)M\{S(t)k(t)\}\Delta t + 2a\lambda_1\alpha M\{S^2(t)\}\Delta t - 2\alpha M\{S^2(t)\} + o(\Delta t).$$

Так как $\frac{dM^2\{S(t)\}}{dt} = 2M\{S(t)\}\frac{dM\{S(t)\}}{dt}$, то с учетом (1) можем записать дифференциальное уравнение для дисперсии капитала компании:

$$\frac{dD\{S(t)\}}{dt} = 2\alpha(t)(a\lambda_1 - 1)D\{S(t)\} + \lambda_1 a_2\alpha(t)M\{S(t)\} + 2(c\mu_2 - b\mu_1)C(S,k) + (c_2\mu_2 + b_1\mu_1)M\{k(t)\} + \lambda_0 a_2, \quad (2)$$

где $C(S,k)=\mathrm{cov}(S(t),(k))$. После аналогичных преобразований можем получить дифференциальное уравнение для дисперсии числа клиентов компании

$$\frac{dD\{k(t)\}}{dt} = \frac{dM\{k^2(t)\}}{dt} - \frac{dM^2(k(t))}{dt},$$
$$\frac{dD\{k(t)\}}{dt} = -2\mu D\{k(t)\} + \mu M\{k(t)\} +$$

$$+\lambda_1\alpha(t)M\{S(t)\}+2\lambda_1\alpha(t)C(S,k)+\lambda_0. \quad (3)$$

Уравнение для ковариации $S(t)$и $k(t)$ имеет следующий вид

$$\frac{dC(S,k)}{dt}=\frac{dM(S(t)k(t))}{dt}-\frac{d[M\{S(t)\}M\{k(t)\}]}{dt},$$

$$\frac{dC(S,k)}{dt}=\lambda_1\alpha(t)D(S(t))+(c\mu_2-b\mu_1)D\{k(t)\}+ \quad (4)$$
$$+\lambda_1 a\alpha(t)M\{S(t)\}+\lambda_0 a+(\lambda_1 a\alpha(t)-\alpha(t)-\mu)C(S,k).$$

Заметим, что в уравнениях (2), (3), (4) присутствуют выражения для средних значений капитала и числа клиентов компании, что является решением системы (1). Имеем (далее для удобства будем $\alpha(t)$ обозначать α):

$$M\{S(t)\}=\frac{1}{\lambda_1\alpha}\left[K_1 e^{\gamma_1 t}(\mu+\gamma_1)+K_2 e^{\gamma_{21} t}(\mu+\gamma_{21})\right]+$$
$$+\frac{1}{\lambda_1\alpha}\left(\frac{\mu\alpha\lambda_0}{\gamma_1\gamma_2}-\lambda_0\right), \quad (5)$$
$$M\{k(t)\}=K_1 e^{\gamma_1 t}+K_2 e^{\gamma_{21} t}+\frac{\alpha\lambda_0}{\gamma_1\gamma_2},$$

где γ_1, γ_2 – корни характеристического уравнения системы (1); K_1, K_2 – константы интегрирования, определяемые из начальных условий $M\{S(0)\}=S_0$, $M\{k(0)\}=k_0$.

Поведение дисперсий капитала и числа клиентов в зависимости от $\alpha(t)$

Рассмотрим решение системы дифференциальных уравнений относительно ковариаций $S(t)$и $k(t)$ при $\alpha=0$. Для этого подставим в систему значение α, после чего получим [далее, чтобы подчеркнуть зависимость интересующих нас функций от t и α будем записывать $D_S(t,\alpha)$, $D_k(t,\alpha)$, $C_{Sk}(t,\alpha)$]:

$$\frac{dD_S(t,0)}{dt}=2(c\mu_2-b\mu_1)C_{Sk}(t,0)+$$
$$+(c_2\mu_2+b_1\mu_1)M\{k(t,0)\}+\lambda_0 a_2,$$
$$\frac{dC_{Sk}\{t,0\}}{dt}=(c\mu_2-b\mu_1)D_k(t,0)+\lambda_0 a-\mu C_{Sk}(t,0),$$
$$\frac{dD_k(t,0)}{dt}=-2\mu D_k(t,0)+\mu M\{k(t,0)\}+\lambda_0. \quad (6)$$

Так как в систему входят выражения средних начений капитала и числа клиентов при $\alpha=0$, то необходимо записать решение системы (1) в этом случае. Имеем [далее математическое ожидание капитала и числа клиентов будем обозначать $\bar{S}(t)$, $\bar{k}(t)$]:

$$\frac{d\bar{S}(t)}{dt}=a\lambda_0+(c\mu_2-b\mu_1)\bar{k}(t),\ \frac{d\bar{k}(t)}{dt}=\lambda_0-\mu\bar{k}(t). \quad (7)$$

Решение системы (7) имеет следующий вид:

$$\bar{S}(t,0)=\lambda_0\left(a+\frac{c\mu_2-b\mu_1}{\mu}\right)t-D_1\frac{c\mu_2-b\mu_1}{\mu}e^{-\mu t}+D_2,$$
$$\bar{k}(t,0)=\frac{\lambda_0}{\mu}+D_1 e^{-\mu t},$$

где константы D_1, D_2 определяются из начальных условий $\bar{S}(0,0)=S_0$, $\bar{k}(0,0)=k_0$.

Заметим, что $D_k(t,0)$однозначно определяется из второго уравнения системы (6). Имеем

$$D_k(t,0)=C_1 e^{-2\mu t}+\frac{D_1}{\mu}e^{-\mu t}+\frac{\lambda_0}{\mu}.$$

Тогда из третьего уравнения системы (6) получаем выражение для ковариации

$$C_{Sk}(t,0)=\frac{C_1}{\mu}e^{-2\mu t}+\left(C_2+\frac{D_1}{\mu}t\right)e^{-\mu t}+(c\mu_2-b\mu_1+a\mu)\frac{\lambda_0}{\mu^2}.$$

Запишем выражение для дисперсии капитала:

$$D_S(t,0)=\left[\frac{2\lambda_0}{\mu^2}(c\mu_2-b\mu_1)(c\mu_2-b\mu_1+a\mu)+\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda_0}{\mu}(c\mu_2-b\mu_1+a\mu)\right]t-\frac{2D_1}{\mu^2}(c\mu_2-b\mu_1)te^{-\mu t}-$$
$$-2\left[\frac{1}{\mu}(c\mu_2-b\mu_1)(C_2+2D_1)+(c\mu_2-b\mu_1)\frac{D_1}{\mu^2}\right]e^{-\mu t}-$$
$$-\frac{C_1}{\mu^2}(c\mu_2-b\mu_1)e^{-2\mu t}+C_3,$$

где константы C_1, C_2, C_3 определяются из следующих начальных условий:

$$D_S(0,0)=0,\ D_k(0,0)=0,\ C_{Sk}(0,0)=0.$$

Имеем

$$C_1=-\frac{\lambda_0}{\mu}-\frac{D_1}{\mu},\ C_2=\frac{C_1}{\mu}-(c\mu_2-b\mu_1+a\mu)\frac{\lambda_0}{\mu^2},$$
$$C_3=\frac{2}{\mu}(c\mu_2-b\mu_1)\left(C_2+2D_1-\frac{D_1}{\mu}\right)+\frac{C_1}{\mu^2}(c\mu_2-b\mu_1).$$

Система дифференциальных уравнений относительно ковариаций капитала и числа клиентов при ненулевом $\alpha(t)$ имеет следующий вид:

$$\frac{dD_S(t,\alpha)}{dt}=2\alpha(a\lambda_1-1)D_S(t,\alpha)+\lambda_1 a_2\alpha\bar{S}(t,\alpha)+$$
$$+2(c\mu_2-b\mu_1)C_{Sk}(t,\alpha)+(c_2\mu_2+b_1\mu_1)\bar{k}(t,\alpha)+\lambda_0 a_2,$$
$$\frac{dC_{Sk}(t,\alpha)}{dt}=\lambda_1\alpha D_S(t,\alpha)+(c\mu_2-b\mu_1)D_k(t,\alpha)+$$
$$+\lambda_1 a\alpha\bar{S}(t,\alpha)+\lambda_0 a+(\lambda_1 a\alpha-\alpha-\mu)C_{Sk}(t,\alpha).$$
$$\frac{dD_k(t,\alpha)}{dt}=-2\mu D_k(t,\alpha)+\mu\bar{k}(t,\alpha)+ \quad (8)$$
$$+\lambda_1\alpha+2\lambda_1\alpha C_{Sk}(t,\alpha)+\lambda_0.$$

Обозначим через $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ – корни характеристического уравнения системы (8). Само уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2\alpha(a\lambda_1-1)-\kappa_1 & 2(c\mu_2-b\mu_1) & 0 \\ \lambda_1\alpha & \lambda_1 a\alpha-\alpha-\mu-\kappa_2 & c\mu_2-b\mu \\ 0 & 2\lambda_1\alpha & -2\mu-\kappa_2 \end{vmatrix}=0$$

или в явном виде

$$-\kappa^3+3(\lambda_1\alpha a-\mu-\alpha)\kappa^2+2\left[-(\lambda_1\alpha a-\mu-\alpha)^2+\right.$$
$$\left.+2\mu\alpha(\lambda_1-1)+2\lambda_1\alpha(c\mu_2-b\mu_1)\right]\kappa-4(\lambda_1\alpha a-\mu-\alpha)\times$$
$$\times\left[\mu\alpha(\lambda_1 a-1)+\lambda_1\alpha(c\mu_2-b\mu_1)\right]=0, \quad (9)$$

откуда $\kappa_1=\gamma_1+\gamma_2, \kappa_2=2\gamma_1, \kappa_3=2\gamma_2$, где γ_1, γ_2 – корни характеристического уравнения системы (1):

$$\gamma_1=\frac{-(\mu-a\lambda_1\alpha+\alpha)+\sqrt{D}}{2},\ \gamma_2=\frac{-(\mu-a\lambda_1\alpha+\alpha)-\sqrt{D}}{2},$$
$$D=(\mu-a\lambda_1\alpha+\alpha)^2-4[\alpha\lambda_1(b\mu_1-c\mu_2-\mu a)+\mu\alpha].$$

Решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (8) запишем в виде

$$D_S(t,\alpha)=F_1(t)Y_{11}e^{\kappa_1 t}+F_2(t)Y_{21}e^{\kappa_2 t}+F_3(t)Y_{31}e^{\kappa_3 t},$$

$$C_{Sk}(t,\alpha)=F_1(t)Y_{12}e^{\kappa_1 t}+F_2(t)Y_{22}e^{\kappa_2 t}+F_3(t)Y_{32}e^{\kappa_3 t},$$

$$D_k(t,\alpha)=F_1(t)Y_{13}e^{\kappa_1 t}+F_2(t)Y_{23}e^{\kappa_2 t}+F_3(t)Y_{33}e^{\kappa_3 t},$$

где Y_{ij} – алгебраические дополнения матрицы

$$\begin{Vmatrix} 2\alpha(a\lambda_1-1) & 2(c\mu_2-b\mu_1) & 0 \\ \lambda_1\alpha & \lambda_1 a\alpha-\alpha-\mu_2 & c\mu_2-b\mu \\ 0 & 2\lambda_1\alpha & -2\mu \end{Vmatrix}.$$

Обозначим

$$A=\lambda_1\alpha\overline{S}(t)+\mu\overline{k}(t)+\lambda_0,\quad B=\lambda_1\alpha a\overline{S}(t)+\lambda_0 a,$$

$$C=\lambda_1\alpha a_2\overline{S}(t)+(c_2\mu_2+b_2\mu_1)\overline{k}(t)+\lambda_0 a_2.$$

Тогда чтобы получить общее решение системы (8), запишем уравнения относительно $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$. Имеем

$$F_1'(t)Y_{11}e^{\kappa_1 t}+F_2'(t)Y_{21}e^{\kappa_2 t}+F_3'(t)Y_{31}e^{\kappa_3 t}=C,$$

$$F_1'(t)Y_{12}e^{\kappa_1 t}+F_2'(t)Y_{22}e^{\kappa_2 t}+F_3'(t)Y_{32}e^{\kappa_3 t}=B,$$

$$F_1'(t)Y_{13}e^{\kappa_1 t}+F_2'(t)Y_{23}e^{\kappa_2 t}+F_3'(t)Y_{33}e^{\kappa_3 t}=A.$$

Обозначим Δ – определитель матрицы

$$\begin{Vmatrix} Y_{11} & Y_{21} & Y_{31} \\ Y_{12} & Y_{22} & Y_{32} \\ Y_{13} & Y_{23} & Y_{33} \end{Vmatrix}, \tag{10}$$

тогда имеем следующие выражения для интересующих нас $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$:

$$F_1(t)=\frac{1}{\Delta}\left\{\left[\frac{K_1(T_0)(\gamma_1+\mu)}{[\gamma_1-\kappa_1]}e^{(\gamma_1-\kappa_1)t}+\frac{K_2(T_0)(\gamma_2+\mu)}{[\gamma_2-\kappa_1]}e^{(\gamma_1-\kappa_1)t}-\left(\frac{\mu\alpha\lambda_1}{\kappa_1\gamma_1\gamma_2}-\frac{\lambda_0}{\kappa_1}\right)e^{-\kappa_1 t}\right]J_1+\left[\frac{K_1(T_0)}{\gamma_1-\kappa_1}e^{(\gamma_1-\kappa)}+\frac{K_2(T_0)}{\gamma_2-\kappa_1}e^{(\gamma_2-\kappa_1)}\frac{\alpha\lambda_0}{\kappa_1\gamma\cdot\gamma_2}e^{-\kappa_1 t}\right]I_1-\frac{\lambda_0}{\kappa_1}e^{-\kappa_1 t}J_1\right\}+F_1, \tag{11}$$

где

$$J_i=M_{1i}+M_{i2}a+M_{i1}a_2,\ I_i=\mu M_{i3}+(c_2\mu_2+b_2\mu_1)M_{i1},\ i=1,2,3;$$

M_{ij} – алгебраические дополнения матрицы (10). Выражения для $K_1(T_0)$, $K_2(T_0)$ определяются из условий сшивания в точке T_0для среднего значения капитала. Определим условия сшивания следующим образом:

$$\overline{S}(T_0,0)=\overline{S}(T_0,\alpha),\ \overline{S}'(T_0,0)=\overline{S}'(T_0,\alpha).$$

Имеем

$$K_1(T_0)=\frac{W-\dfrac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1-\gamma_2}\left[W\left(T_0-\dfrac{1}{\gamma_1}\right)+V\right]}{\gamma_1 e^{\gamma_1 T_0}(\mu+\gamma_1)},$$

$$K_2(T_0)=\frac{W\left(T_0-\dfrac{1}{\gamma_1}\right)+V}{e^{\gamma_2 T_0}(\mu+\gamma_2)\left(1-\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)}, \tag{12}$$

где

$$W=\lambda_0\lambda_1\alpha\left(\frac{c\mu_2-b\mu_1}{\mu}+a\right),\ V=S_0\lambda_1\alpha-\frac{\mu\alpha\lambda_0}{\gamma_1\gamma_2}+\lambda_0.$$

Выражения для $F_2(t)$, $F_3(t)$ имеют аналогичный вид. Заметим, что в выражениях для $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ присутствуют константы F_1, F_2, F_3, которые определим из условий сшивания на границе:

$$\begin{gathered} D_S(T_0,0)=D_S(T_0,\alpha),\ C_{Sk}(T_0,0)=C_{Sk}(T_0,\alpha), \\ D_k(T_0,0)=D(T_0,\alpha). \end{gathered} \tag{13}$$

(13) – алгебраическая система уравнений относительно интересующих нас констант. Решая систему, получим

$$F_j=\frac{e^{-\kappa_j T_0}}{D}\Big[\big(D_S(T_0,0)-Q_1(T_0)\big)M_{j1}+\big(C_{Sk}(T_0,0)-Q_2(T_0)\big)M_{j1}+\big(D_k(T_0,0)-Q_3(T_0)\big)M_{j3}\Big],\ j=1,2,3, \tag{14}$$

где D – определитель матрицы (10);

$$\begin{aligned} Q_l(t)=&\frac{e^{\gamma_1 t}}{\Delta}\left(\frac{Y_{1l}}{\gamma_1-\kappa_1}K_1(T_0)[(\gamma_1+\mu)J_1+I_1]+\frac{Y_{2l}}{\gamma_1-\kappa_2}K_1(T_0)[(\gamma_1+\mu)J_2+I_2]+\frac{Y_{3l}}{\gamma_1-\kappa_2}K_1(T_0)[(\gamma_1+\mu)J_3+I_3]\right)+ \\ &+\frac{e^{\gamma_2 t}}{\Delta}\left(\frac{Y_{1l}}{\gamma_2-\kappa_1}K_2(T_0)[(\gamma_2+\mu)J_1+I_1]+\frac{Y_{2l}}{\gamma_2-\kappa_2}K_2(T_0)[(\gamma_2+\mu)J_2+I_2]+\frac{Y_{3l}}{\gamma_3-\kappa_2}K_2(T_0)[(\gamma_1+\mu)J_3+I_3]\right)+ \\ &+\frac{1}{\Delta}\left(\frac{Y_{1l}}{\kappa_1}\frac{\alpha\lambda_0}{\gamma_1\gamma_2}(-\mu J_1-I_1)+\frac{Y_{2l}}{\kappa_2}\frac{\alpha\lambda_0}{\gamma_1\gamma_2}(-\mu J_2-I_2)+\frac{Y_{3l}}{\kappa_3}\frac{\alpha\lambda_0}{\gamma_1\gamma_2}(-\mu J_3-I_3)\right),\ l=1,2,3. \end{aligned} \tag{15}$$

Из (14) видим, что F_j, j=1,2,3 являются функциями от момента времени включения рекламы T_0. Запишем выражения для дисперсии капитала, ковариации капитала и числа клиентов, и дисперсии числа клиентов для $T_0 \le t \le T_1$:

$$D_S(t,\alpha)=F_1(T_0)Y_{11}e^{\kappa_1 t}+F_2(T_0)Y_{21}e^{\kappa_2 t}+F_3(T_0)Y_{31}e^{\kappa_3 t}+Q_1(t),$$

$$C_{Sk}(t,\alpha)=F_1(T_0)Y_{12}e^{\kappa_1 t}+F_2(T_0)Y_{22}e^{\kappa_2 t}+F_3(T_0)Y_{32}e^{\kappa_3 t}+Q_2(t),$$

$$D_k(t,\alpha)=F_1(T_0)Y_{13}e^{\kappa_1 t}+F_2(T_0)Y_{23}e^{\kappa_2 t}+F_3(T_0)Y_{33}e^{\kappa_3 t}+Q_3(t). \tag{16}$$

Определим поведение интересующих нас характеристик капитала и числа клиентов для случая, когда доля денег на рекламу равна нулю и $T_1 \le t \le T$. Имеем

$$D_k(t,0)=R_1 e^{-2\mu t}+\frac{L(T_0,T_1)_1}{\mu}e^{-\mu t}+\frac{\lambda_0}{\mu}.$$

$$C_{Sk}(t,0)=\frac{R_1}{\mu}e^{-2\mu t}+\left(R_2+\frac{L(T_0,T_1)_1}{\mu}t\right)e^{-\mu t}+(c\mu_2-b\mu_1+a\mu)\frac{\lambda_0}{\mu^2};$$

$$D_S(t,0)=\left[\frac{2\lambda_0}{\mu^2}(c\mu_2-b\mu_1)(c\mu_2-b\mu_1+a\mu)+\frac{\lambda_0}{\mu}(c\mu_2-b\mu_1+a\mu)\right]t-\frac{2L_1(T_0,T_1)}{\mu^2}(c\mu_2-b\mu_1)\times$$

$$\times te^{-\mu t}-2\left[\frac{1}{\mu}(c\mu_2-b\mu_1)(R_2+2L_1(T_0,T_1))+\right.$$

$$\left.+(c\mu_2-b\mu_1)\frac{L_1(T_0,T_1)}{\mu^2}\right]e^{-\mu t}-\frac{R_1}{\mu^2}(c\mu_2-b\mu_1)e^{-2\mu t}+R_3, \quad (17)$$

где константы R_1, R_2, R_3 определяются из условий сшивания на границе. Заметим, что интересующие нас константы будут отличаться от тех констант, которые определены для случая α=0. В этом случае они будут зависеть от T_0 и T_1. Имеем

$$D_S(T_1,\alpha)=D_S(T_1,0),$$
$$D_k(T_1,\alpha)=D_k(T_1,0),$$
$$C_{Sk}(T_1,\alpha)=C_{Sk}(T_1,0).$$

Выражение для $L_1(T_0,T_1)$определяется из условий сшивания для средних значений капитала и числа клиентов аналогичным образом

$$L_1(T_0,T_1)=\left[\left(\left(W-\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1-\gamma_2}\left(W\left(T_0-\frac{1}{\gamma_1}\right)+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+V\right)\right)\times\frac{e^{\gamma_1(T_1-T_0)}}{\gamma_1(\gamma_1+\mu)}+\left(W\left(T_0-\frac{1}{\gamma_1}\right)+V\right)\times$$

$$\left.\times\frac{e^{\gamma_2(T_1-T_0)}\gamma_1}{(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_2+\mu)}+\frac{\alpha\lambda_0}{\gamma_1\gamma_2}-\frac{\lambda_0}{\mu}\right]e^{\mu T_1}. \quad (18)$$

Выпишем выражения для констант R_1,R_2,R_3 :

$$R_1(T_0,T_1)=e^{2\mu T_1}\left(D_k(T_1,\alpha)-\frac{\lambda_0}{\mu}-\frac{L_1(T_0,T_1)}{\mu}e^{-\mu T_1}\right),$$

$$R_2(T_0,T_1)=e^{\mu T_1}\left(C_{Sk}(T_1,\alpha)-\frac{R_1(T_0,T_1)}{\mu}\times\right.$$

$$\left.\times e^{-2\mu T_1}-(c\mu_2-b\mu_1+a\mu)\frac{\lambda_0}{\mu^2}-\frac{L_1(T_0,T_1)}{\mu}T_1e^{-\mu T_1}\right),$$

$$R_3(T_0,T_1)=D_S(T_1,\alpha)-\frac{\lambda_0}{\mu}\left[\frac{2}{\mu}(c\mu_2-b\mu_1)\times\right.$$

$$\left.\times(c\mu_2-b\mu_1+a\mu)+(c_2\mu_2+b_2\mu_1)+\lambda_0 a\mu\right]\times$$

$$\times T_1+\frac{2L_1(T_0,T_1)}{\mu^2}(c\mu_2-b\mu_1)T_1e^{-\mu T_1}+$$

$$+\frac{2}{\mu}(c\mu_2-b\mu_1)\left(R_2(T_0,T_1)+L_1(T_0,T_1)\left(2+\frac{1}{\mu}\right)\right)\times$$

$$\times e^{-\mu T_1}+\frac{R_1(T_0,T_1)}{\mu^2}(c\mu_2-b\mu_1)e^{-2\mu T_1}. \quad (19)$$

Теперь дисперсия и математическое ожидание капитала зависят от моментов включения и отключения рекламы. Вспомнив критерий оптимальности, обозначим

$$U(T_0,T_1)=\frac{M\{S(T)\}-S_0}{\sqrt{D\{S(T)\}}}. \quad (20)$$

При выполнении условия $\left.\frac{\partial U(T_0,T_1)}{\partial T_0}\right|_{T_0=0}<0$ страховая компания включает рекламу в нулевой момент времени, то есть в тот самый момент, когда начинает работать [2]. Таким образом, критерий оптимальности (20) запишем в виде

$$U(T_0,T_1)=\frac{M\{S(T)\}-S_0}{\sqrt{D\{S(T)\}}}\Rightarrow\max.$$

Имеем

$$\left.\bar{S}(T,0)\right|_{T_0=0}=P_1(T-T_1)+e^{-\mu(T-T_1)}\left(V_1e^{\gamma_1T_1}+\right.$$

$$\left.+V_2e^{\gamma_{21}T_1}+V_3\right)+W_1e^{\gamma_1T_1}+W_2e^{\gamma_2T_1}+P_2,$$

$$\left.D_S(T,0)\right|_{T_0=0}=H_1(T-T_1)-Te^{-\mu(T-T_1)}\times$$

$$\times\left(A_1e^{\gamma_1T_1}+A_2e^{\gamma_2T_1}+A_3\right)-e^{-\mu(T-T_1)}\left(B_1e^{\kappa_1T_1}+B_2e^{\kappa_2T_1}+\right.$$

$$\left.+B_3e^{\kappa_3T_1}+B_4e^{\gamma_1T_1}+B_5e^{\gamma_2T_1}+B_6\right)-e^{-\mu(T-T_1)}T_1\times$$

$$\times\left(E_1e^{\gamma_1T_1}+E_2e^{\gamma_2T_1}+E_3\right)-e^{-2\mu(T-T_1)}\left(G_1e^{\kappa_1T_1}+\right.$$

$$\left.+G_2e^{\kappa_2T_1}+G_3e^{\kappa_3T_1}+G_4e^{\gamma_1T_1}+G_5e^{\gamma_2T_1}+G_6\right)+$$

$$+J_1e^{\kappa_1T_1}+J_2e^{\kappa_2T_1}+J_3e^{\kappa_3T_1}+J_4e^{\gamma_1T_1}+J_5e^{\gamma_2T_1}+$$

$$+\left(I_1e^{\gamma_1T_1}+I_2e^{\gamma_2T_1}+I_3\right)T_1+H_2, \quad (21)$$

где все $P_i,V_i,W_i,H_i,A_i,B_i,E_i,G_i,J_i,I_i$ – выражения, зависящие от параметров модели. Например,

$$H_1=\frac{2\lambda_0}{\mu^2}(c\mu_2-b\mu_1)(c\mu_2-b\mu_1+a\mu)+$$

$$+\frac{\lambda_0}{\mu}(c\mu_2-b\mu_1+a\mu). \quad (22)$$

Из-за громоздкости эти выражения не приводятся. Далее задача сводится к отысканию с помощью численных методов такого момента T_1, при котором функция $U(0,T_1)$ имеет максимум.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахмедова Д.Д., Терпугов А.Ф.* Математическая модель функционирования страховой компании с учетом расходов на рекламу // Изв. вузов. Физика. 2001. № 1. С. 25–28.
2. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. 615 с.

Статья представлена кафедрой прикладной информатики факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию номера 3 декабря 2001 г.