ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ТОРГОВОЙ СЕССИИ И ОЦЕНКА ЕЕ ПАРАМЕТРОВ

О.А. ЗМЕЕВ, Е.В. НОВИЦКАЯ

Пусть имеется партия товара объема Q и время его продажи (торговая сессия) ограничено величиной T. Тогда может быть два варианта: а) товар распродан до окончания торговой сессии и б) торговая сессия кончилась, но товар распродан не весь и остались его излишки. Представляет определенный практический интерес нахождение вероятностных характеристик времени продажи товара и количества товара, проданного за торговую сессию.

Модель продаж

Будем считать, что поток покупателей является пуассоновским потоком постоянной интенсивности λ, а величина покупки ξ отдельного покупателя есть случайная величина с $M\{\xi\} = a_1$, $M\{\xi^2\} = a_2$ и покупки не зависят друг от друга.

Пусть торговля идет в течение времени t. Количество товара, проданного за это время, обозначим $x(t)$. Разумеется, $x(t)$ есть случайный процесс.

Пусть за время t совершено n покупок. Тогда $x(t)$ можно записать в виде

$$x(t) = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_n . \qquad (1)$$

Вычисляя математическое ожидание, получим

$$M\{x(t) \mid n\} = a_1 n, \quad M\{x(t)\} = a_1 \lambda t .$$

Далее имеем

$$x^2(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j .$$

Вычисляя математическое ожидание с учетом свойств пуассоновских случайных величин [1], получим

$$M\{x^2(t)\,|\,n\} = a_2 n + a_1^2 n(n-1), \qquad M\{x^2(t)\} = a_2 \lambda t + a_1^2 (\lambda t)^2 .$$

Отсюда для дисперсии процесса $x(t)$ получаем

$$D\{x(t)\} = a_2 \lambda t .$$

Поэтому диффузионная аппроксимация процесса $x(t)$ имеет вид [1]:

$$dx(t) = a_1 \lambda dt + \sqrt{a_2 \lambda}\, dw(t), \tag{2}$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский случайный процесс. Именно эту аппроксимацию мы и будем использовать при дальнейшем исследовании.

Плотность вероятностей длительности продажи партии товара

Рассмотрим вопрос о плотности вероятностей длительности продажи партии товара объема Q. Пусть $\tau(x)$ есть (случайное) время достижения процессом $x(t)$ порогового значения Q при условии, что в начальный момент времени t значение процесса $x(t)$ было равно x, то есть $x(t)=x$.

Введем функцию

$$g(s,x) = M\left\{e^{-s\tau(x)}\right\}, \tag{3}$$

которая является преобразованием Лапласа от плотности вероятностей величины $\tau(x)$.

Выведем уравнение для $g(s,x)$. Пусть прошло время Δt. За этот интервал времени процесс $x(t)$ получил приращение Δx. Тогда имеем следующую цепочку преобразований:

$$g(s,x) = M\left\{e^{-s\tau(x)}\right\} = M\left\{e^{-s(\Delta t + \tau(x+\Delta x))}\right\} = e^{-s\Delta t} M_{\Delta x}\{g(s, x+\Delta x)\} .$$

Разлагая $e^{-s\Delta t}$ и $g(s, x+\Delta x)$ в ряды Тейлора

$$e^{-s\Delta t} = 1 - s\Delta t + o(\Delta t),$$

$$g(s, x+\Delta x) = g(s,x) + \frac{\partial g(s,x)}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 g(s,x)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + o((\Delta x)^2),$$

получим

$$g(s,x)=(1-s\Delta t)M_{\Delta x}\left\{g(s,x)+\frac{\partial g(s,x)}{\partial x}\Delta x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 g(s,x)}{\partial x^2}(\Delta x)^2\right\}+o(\Delta t).$$

Усредняя по Δx с учетом свойств винеровского случайного процесса, будем иметь

$$g(s,x)=(1-s\Delta t)\left[g(s,x)+\frac{\partial g(s,x)}{\partial x}a_1\lambda\Delta t+\frac{a_2\lambda}{2}\cdot\frac{\partial^2 g(s,x)}{\partial x^2}\Delta t\right]+o(\Delta t)=$$

$$=g(s,x)+\left[-sg(s,x)+\frac{\partial g(s,x)}{\partial x}a_1\lambda+\frac{a_2\lambda}{2}\cdot\frac{\partial^2 g(s,x)}{\partial x^2}\right]\Delta t+o(\Delta t).$$

Сокращая $g(s,x)$, деля на Δt и переходя к пределу $\Delta t\to\infty$, получим уравнение для $g(s,x)$:

$$\frac{a_2\lambda}{2}\cdot\frac{\partial^2 g(s,x)}{\partial x^2}+a_1\lambda\frac{\partial g(s,x)}{\partial x}-sg(s,x)=0,$$

или, в стандартном виде,

$$\frac{\partial^2 g(s,x)}{\partial x^2}+2\frac{a_1}{a_2}\frac{\partial g(s,x)}{\partial x}-\frac{2s}{a_2\lambda}g(s,x)=0. \tag{4}$$

Это уравнение надо решить при граничном условии $g(s,Q)=1$.

Характеристическое уравнение для уравнения (4) имеет вид

$$z^2+2\frac{a_1}{a_2}z-\frac{2s}{a_2\lambda}=0.$$

Его корни

$$z_1(s)=\sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2}+\frac{2s}{a_2\lambda}}-\frac{a_1}{a_2}>0,\qquad z_2(s)=-\sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2}+\frac{2s}{a_2\lambda}}-\frac{a_1}{a_2}<0.$$

Поэтому общее решение уравнения (4) имеет вид

$$g(s,x)=C_1(s)e^{z_1(s)x}+C_2(s)e^{z_2(s)x}.$$

Но в силу того, что $z_2(s)<0$, при $x\to$ - ∞ в выражении для $M\{\tau(x)\}$ появляются экспоненциально нарастающие слагаемые, что противоречит реальности.

Поэтому надо положить $C_2(s)=0$. Тогда условие $g(s,Q)=1$ дает $C_1(s)=e^{-z_1(s)Q}$, и поэтому $g(s,x)=e^{z_1(s)(x-Q)}$.

Так как продажи начинаются со значения $x=0$, то нас интересует лишь $\tau(0)=t$. Для него

$$g(s,0)=g_t(s)=e^{-z_1(s)Q}=\exp\left(\frac{a_1}{a_2}Q-\sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2}+\frac{2s}{a_2\lambda}}Q\right), \tag{5}$$

что и дает преобразование Лапласа для плотности вероятностей времени продажи партии товара объема Q.

Прежде чем выписать обратное преобразование Лапласа, найдем основные характеристики величины t. Имеем

$$\psi(s)=\ln g_t(s)=\frac{a_1}{a_2}Q-\sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2}+\frac{2s}{a_2\lambda}}Q.$$

Тогда $M\{t\}=-\psi'(0)$, $D\{t\}=\psi''(0)$. Далее получаем

$$\psi'(s)=-\left[\frac{a_1^2}{a_2^2}+\frac{2s}{a_2\lambda}\right]^{-1/2}\cdot\frac{Q}{a_2\lambda}, \quad \psi''(s)=\left[\frac{a_1^2}{a_2^2}+\frac{2s}{a_2\lambda}\right]^{-3/2}\cdot\frac{Q}{(a_2\lambda)^2},$$

так что

$$M\{t\}=\frac{Q}{a_1\lambda}, \qquad D\{t\}=\frac{a_2Q}{a_1^3\lambda^2}. \tag{6}$$

Для нахождения обратного преобразования Лапласа от функции $g_t(s)$ запишем ее в виде

$$g_t(s)=\exp\left(\frac{a_1}{a_2}Q-\sqrt{\frac{2}{a_2\lambda}}Q\sqrt{s+\frac{a_1^2\lambda}{2a_2}}\right).$$

Пользуясь свойствами преобразования Лапласа и таблицами обратного преобразования Лапласа [2, ф-лы (23.91) и (204)], получим

$$p(t)=\frac{Q}{\sqrt{2\pi a_2\lambda}t^{3/2}}\exp\left(\frac{a_1}{a_2}Q-\frac{a_1^2\lambda}{2a_2}t-\frac{Q^2}{2a_2\lambda t}\right). \tag{7}$$

Эту формулу можно записать и в таком виде

$$p(t) = \frac{Q}{\sqrt{2\pi a_2 \lambda} t^{3/2}} \exp\left(-\frac{a_1^2 \lambda}{2a_2 t} \left(t - \frac{Q}{a_1 \lambda} \right)^2 \right). \tag{8}$$

Рассмотрим асимптотику этого выражения в случае, когда

$$\frac{M\{t\}}{\sqrt{D\{t\}}} = \sqrt{\frac{Qa_1}{a_2}} >> 1.$$

Это условие можно записать и так:

$$\frac{Qa_1}{a_2} >> 1, \text{ или так: } \quad \frac{Q}{a_1} \cdot \frac{a_1^2}{a_2} >> 1. \tag{9}$$

По сути дела, это условие означает, что продаваемая партия имеет достаточно большой объем.

В этом случае в выражении (8) основную роль играет сомножитель $\left(t - \frac{Q}{a_1 \lambda} \right)^2$, а все остальные t можно заменить выражением $Q/a_1\lambda$. Тогда приближенно получим

$$p(t) = \sqrt{\frac{a_1^3 \lambda^2}{2\pi a_2 Q}} \exp\left(-\frac{a_1^3 \lambda^2}{2a_2 Q} \left(t - \frac{Q}{a_1 \lambda} \right)^2 \right), \tag{10}$$

то есть при больших объемах партии товара время его продажи имеет приближенно нормальное распределение с параметрами, даваемыми формулой (6).

Оценка параметров

Как получено в [3], оптимальный объем партии товара зависит от величин $a_1 \lambda T$ и $a_2 \lambda T$. Заранее эти величины неизвестны, и их надо определять в процессе торговли.

Конечно, если фиксировать размер каждой покупки и ее время, то все эти величины легко оцениваются. Однако это не всегда возможно. Поэтому мы рассмотрим оценку этих величин по результатам торговой сессии.

Рассмотрим сначала оценку этих величин по количеству проданного товара. Пусть всего прошло n сессий и $n-m$ из них окончились распродажей всей партии товара, а в m сессиях остался нераспроданный товар, так что количество проданного в них товара составило $x_1, x_2, x_3, ..., x_m$.

Как было показано в [3], количество проданного за торговую сессию товара x есть нормальная случайная величина с математическим ожиданием $M\{x\} = m_x = a_1 \lambda T$ и дисперсией $D\{x\} = \sigma_x^2 = a_2 \lambda T$. Тогда вероятность того, что за торговую сессию весь товар будет распродан, равна

$$P\{x < Q\} = \int_Q^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) dx = 1 - \Phi\left(\frac{Q-m_x}{\sigma_x}\right). \tag{11}$$

С другой стороны, стандартная оценка вероятности того, что товар будет распродан за торговую сессию, имеет вид

$$\frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - h,$$

где $h = m/n$. Приравнивая эти два выражения, получим уравнение

$$\Phi\left(\frac{Q-m_x}{\sigma_x}\right) = h, \tag{12}$$

или, в другой форме,

$$m_x + \sigma_x \Psi(h) = Q. \tag{13}$$

Найдем теперь среднее количество проданного товара при условии, что он не весь будет распродан. Имеем

$$\int_{-\infty}^{Q} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) dx = m_x P\{x < Q\} - \frac{\sigma_x}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(Q-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right),$$

и поэтому математическое ожидание количества проданного товара при условии, что он не весь будет распродан, равно вычисленной величине, деленной на $P\{x < Q\}$, то есть

$$M\{x \mid x < Q\} = m_x - \sigma_x \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{Q-m_x}{\sigma_x}\right)^2\right)}{\sqrt{2\pi}\Phi\left(\frac{Q-m_x}{\sigma_x}\right)}. \tag{14}$$

С другой стороны, в качестве оценки этой величины естественно взять оценку вида

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i .$$

Тогда, используя метод моментов, мы приходим к уравнению

$$m_x - \sigma_x \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{Q-m_x}{\sigma_x}\right)^2\right)}{\sqrt{2\pi}\Phi\left(\frac{Q-m_x}{\sigma_x}\right)} = \overline{x}. \tag{15}$$

С учетом выражения (12) это уравнение может быть записано в виде

$$m_x - \sigma_x \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\Psi^2(h)\right)}{\sqrt{2\pi}h} = \overline{x}.$$

Вводя для краткости функцию

$$F(h) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\Psi^2(h)\right)}{\sqrt{2\pi}h},$$

окончательно получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} m_x - \sigma_x F(h) &= \overline{x}, \\ m_x + \sigma_x \Psi(h) &= Q. \end{aligned} \tag{16}$$

Отсюда и находятся в явном виде оценки интересующих нас величин:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a_2\lambda T = \frac{Q-\overline{x}}{\Psi(h)+F(h)}, \\ m_x &= a_1\lambda T = \frac{\overline{x}\Psi(h)+QF(h)}{\Psi(h)+F(h)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Это и решает поставленную задачу.

Рассмотрим теперь оценку величин $a_1\lambda T$ и $a_2\lambda T$ по длительности торговой сессии. Выше было показано, что длительность торговой сессии t есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием $M\{t\} = m_t = Q/a_1\lambda$ и дисперсией $D\{t\} = \sigma_t^2 = a_2\lambda Q/(a_1\lambda)^3$. Отсюда можно получить, что

$$a_1\lambda T = \frac{QT}{m_t}, \quad a_2\lambda T = \frac{Q^2 T\sigma_t^2}{m_t^3}.$$

Если ввести безразмерные величины $\mu = m_t/T$ и $s = \sigma_t/T$, то можно записать:

$$a_1\lambda T = \frac{Q}{\mu}, \qquad a_2\lambda T = \frac{Q^2 s^2}{\mu^3}. \tag{18}$$

Таким образом, надо оценить величины μ и s.

Пусть всего было n торговых сессий, из которых m закончились досрочно в моменты времени $t_1, t_2, t_3, ..., t_m$ и в $n - m$ сессиях товар остался нераспроданным, то есть до полной продажи товара потребовалось бы время больше T. Тогда

$$P\{t > T\} = \int_T^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp\left(-\frac{(t-m_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) dt = 1 - \Phi\left(\frac{T-m_t}{\sigma_t}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1-\mu}{s}\right). \tag{19}$$

С другой стороны, оценкой вероятности $P\{t > T\}$ является величина

$$\frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - h,$$

где $h = m/n$. Приравнивая друг другу эти величины, получим уравнение

$$\Phi\left(\frac{1-\mu}{s}\right) = h, \text{ или } \frac{1-\mu}{s} = \Psi(h), \text{ или } \mu + s\Psi(h) = 1. \tag{20}$$

Далее имеем

$$\int_{-\infty}^T \frac{t}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp\left(-\frac{(t-m_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) dt = m_t \cdot P\{t < T\} - \frac{\sigma_t}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{T-m_t}{\sigma_t}\right)^2\right).$$

Отсюда следует, что условная средняя длительность торговой сессии при условии, что она закончится ранее времени T, то есть при условии, что за время T будет продан весь товар, равна

$$M\{t\,|\,t<T\}=m_t-\sigma_t\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{T-m_t}{\sigma_t}\right)^2\right)}{\sqrt{2\pi}\Phi\left(\frac{T-m_t}{\sigma_t}\right)}. \qquad (21)$$

Оценкой этой величины является величина

$$\bar{t}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}t_i\,.$$

Приравнивая эти величины друг другу, получим уравнение

$$m_t-\sigma_t\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{T-m_t}{\sigma_t}\right)^2\right)}{\sqrt{2\pi}\Phi\left(\frac{T-m_t}{\sigma_t}\right)}=\bar{t}\,. \qquad (22)$$

Вводя безразмерную величину $\tau=\bar{t}/T$, можем записать это уравнение в виде

$$\mu-s\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{T-m_t}{\sigma_t}\right)^2\right)}{\sqrt{2\pi}\Phi\left(\frac{T-m_t}{\sigma_t}\right)}=\tau\,.$$

Учитывая соотношение (20), преобразуем это уравнение в вид $\mu-sF(h)=\tau$, где функция $F(h)$ приведена выше.

Таким образом, мы получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}&\mu+s\Psi(h)=1,\\&\mu-sF(h)=\tau,\end{aligned} \qquad (23)$$

что и позволяет определить оценки величин μ и s:

$$\mu = \frac{\tau\Psi(h) + F(h)}{\Psi(h) + F(h)},\ s = \frac{1-\tau}{\Psi(h) + F(h)}. \qquad (24)$$

Зная эти оценки, можно найти и оценки величин $a_1\lambda T$ и $a_2\lambda T$ по формулам (18).

Конечно, более полной была бы следующая постановка проблемы: всего было проведено *n* торговых сессий. Из них *m* закончились досрочно в связи с распродажей всего товара в моменты времени $t_1, t_2, t_3, ..., t_m$; оставшиеся *n–m* сессий закончились в момент времени *T*, и в них было продано количество товара $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-m}$. По этим данным необходимо оценить величины $a_1\lambda T$ и $a_2\lambda T$.

К сожалению, авторам не удалось решить проблему в такой постановке, так как ее решение требует знания совместных плотностей вероятностей, а их нахождение – очень сложная задача. По-видимому, можно рекомендовать оценивать величины $a_1\lambda T$ и $a_2\lambda T$ отдельно по $t_1, t_2, t_3, ..., t_m$ и по $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-m}$, а в качестве окончательного результата брать полусумму полученных таким образом оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.
2. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 466 с.
3. Китаева А.В., Новицкая Е.В., Терпугов А.Ф. Оптимизация продажи скоропортящейся продукции // См. наст. сб. С. 95–105.