УДК 519.2

О. В. ВАЛЬЦ, О. А. ЗМЕЕВ

ДИФФУЗИОННАЯ АПРОКСИМАЦИЯ МОДЕЛИ ФОНДА СОЦИАЛЬНОГО СТРАХОВАНИЯ С РЕЛЕЙНО-ГИСТЕРЕЗИСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ КАПИТАЛОМ

В работе исследуется диффузионное приближение процесса изменения капитала в математической модели фонда социального страхования с детерминированной скоростью выделения средств на социальные программы. В предположении, что скорость изменения капитала является произвольной функцией от текущего значения капитала, исследуется релейно-гистерезисное управление капиталом фонда.

Введение

В настоящее время на рынке страховых услуг и у нас в стране и за рубежом кроме классических страховых компаний достаточно широко представлены различного рода структуры, в деятельности которых активную роль играет государство, выполняя с их помощью некоторые социальные функции и гарантии. Важной отличительной особенностью в функционировании подобного рода объектов на рынке страховых услуг является полный или частичный отказ от получения коммерческой прибыли. Такой подход абсолютно не характерен для стандартных страховых компаний, математические модели которых широко представлены в классической актуарной математике, например [1, 2], и значительном числе работ, опубликованных по этой тематике в последние годы, например [3-6]. Типичным примером подобного рода структур можно считать Государственные фонды социального страхования.

Фонды социального страхования РФ созданы на основании постановления Совета Министров РФ и фонда независимых профсоюзов. В отличие от обычных страховых компаний в задачу фонда входит не только оплата страховых случаев (временная нетрудоспособность, пособия по беременности и родам и т.д.), но и систематические выплаты по реализации региональных и отраслевых программ по охране здоровья работников, санаторно-курортному лечению, обслуживанию детей и т.д. Как уже было отмечено выше, в отличие от обычных страховых компаний фонд не ставит своей задачей накопление капитала, а его целью является рациональное использование страхового фонда, полученного за счет взносов организаций и предприятий.

Построению и исследованию математических моделей фондов социального страхования в последние годы посвящен ряд работ, в которых идеи классической модели страхования применяются с учетом особенности работы таких фондов [7-9]. В данной работе предлагается приближенная математическая модель работы фонда, обобщающая результаты, полученные в [7, 8]. В рамках модели исследуются вероятностные характеристики случайного процесса, описывающего капитал фонда при релейно-гистерезисном управлении капиталом. Исследован частный случай такого управления.

Математическая модель деятельности фонда с детерминированными расходами на социальные программы

Основной характеристикой состояния фонда является его капитал $U(t)$ в момент времени t. С этим капиталом происходят следующие изменения:

1. В фонд поступают средства от предприятий и организаций. Мы будем считать, что они поступают непрерывно во времени со скоростью c_0.

2. Происходят страховые выплаты, Будем считать, что поток страховых выплат является пуассоновским потоком постоянной интенсивности λ, и сами страховые выплаты ξ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с начальными моментами $M\{\xi\} = a_1$ и $M\{\xi^2\} = a_2$.

3. Фонд выделяет часть своих средств на социальные программы. Мы будем считать, что эти средства также выделяются непрерывно во времени, однако скорость их выделения $c^*(U)$ зависит от величины капитала U в данный момент времени.

Величину $c_0 - c^*(U)$ мы в дальнейшем будем обозначать как $c(U)$. Таким образом, $c(U)$ есть скорость изменения капитала за счет детерминированных расходов и она зависит от величины капитала U. Именно в наличии слагаемого $c^*(U)$ и зависимости $c(U)$ от U и заключается отличие данной модели от классических [1, 2].

Кроме того, будем считать, что достижение порога $U(t) = 0$ не приводит к разорению фонда, и даже при $U(t) < 0$ он продолжает функционировать, только происходят задержки по страховым выплатам.

В [7, 8] рассмотрена диффузионная аппроксимация процесса $U(t)$ процесс $S(t)$. После определения соответствующих коэффициентов сноса и диффузии получено, что диффузионная аппроксимация процесса изменения капитала $U(t)$ процесс $S(t)$ описывается как диффузионный случайный процесс вида

$$dS(t) = (c(S) - a_1\lambda)dt + \sqrt{a_2\lambda}dw(t), \tag{1}$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Там же показано, что, так как фонд не стремится к неограниченному накоплению капитала, то существует стационарное (финальное) распределение вероятностей $p(S)$ капитала S. Используя стандартную методику решения стохастического дифференциального уравнения из [10], можно записать, что в диффузионном приближении

$$p(S) = C \cdot \exp\left(\frac{2}{a_2\lambda} \int (c(S) - a_1\lambda) dS \right), \tag{2}$$

где константа C находится из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(S)dS = 1.$$

Рассмотрим случай релейно-гистерезисное управление процессом $S(t)$, усложнив вид зависимости $c(S)$, тем самым, обобщая результаты, полученные в [8].

Релейное гистерезисное управление капиталом

Под релейно-гистерезисным управлением капиталом фонда будем понимать следующую стратегию. Устанавливается два пороговых значения капитала S_1 и S_2, причем $S_1 < S_2$. В области $S < S_1$ финансируются только страховые нужды, а выплаты на социальные программы не производятся, так что $c(S) = c_0 > a_1\lambda$. Условие $c_0 > a_1\lambda$ означает, что в среднем капитал фонда будет расти. В области $S > S_2$ устанавливается $c(S) = c_1(S) < a_1\lambda$, так что производятся выплаты по социальным программам со скоростью $c^* = c_0 - c_1(S) > 0$. То, что $c_1(S) < a_1\lambda$ означает, что из-за этих выплат капитал в среднем уменьшается. Что касается области $S_1 < S < S_2$, то здесь устанавливается $c(S) = c_0$ или $c(S) = c_1(S)$ в зависимости от того, как процесс $S(t)$ вошел в эту область. Если он вошел через порог S_1 снизу вверх, то устанавливается $c(S) = c_0$, если же он вошел через порог S_2 сверху вниз, то остается $c(S) = c_1(S)$. Таким образом, выплаты по социальным программам начинаются по достижении уровня S_2 и прекращаются по достижении уровня S_1.

Обозначим через $p_0(S)$ плотность вероятностей значения капитала, если $c(S) = c_0$. Тогда

$$\int_{S_2}^{S} (c_0 - a_1\lambda)ds = (c_0 - a_1\lambda)(S - S_2),$$

и поэтому

$$p_0(S) = C_0 \cdot \exp\left(\frac{2(c_0 - a_1\lambda)}{a_2\lambda}(S - S_2)\right), \quad S < S_2. \tag{3}$$

Через $p_1(S)$ обозначим плотность вероятностей значения капитала, если $c(S) = c_1(S)$. Тогда

$$\int_{S_1}^{S} (c_1(s) - a_1\lambda)ds = \int_{S_1}^{S} c_1(s)ds - a_1\lambda(S - S_1),$$

и поэтому

$$p_1(S) = C_1 \cdot \exp\left(\frac{2}{a_2\lambda}\int_{S_1}^{S} c_1(s)ds - \frac{2a_1}{a_2}(S - S_1)\right), \quad S > S_1. \tag{4}$$

Теперь необходимо определить константы, C_0 и C_1. Аналогично [8], применяем для решения этой задачи эргодические соображения.

Пусть $c(S) = c_1(S)$. Обозначим через $m_1(S)$ среднее время достижения порога $S = S_1$, если в начальный момент времени, значение капитала равно S. Тогда, рассматривая ситуацию спустя время Δt, можем записать

$$m_1(S) = \Delta t + M\{m_1(S + \Delta S)\}. \tag{5}$$

Разлагая $m_1(S + \Delta S)$ в ряд Тейлора, и, учитывая диффузионность процесса $S(t)$, можем записать

$$M\{m_1(S + \Delta S)\} = m_1(S) + \left[(c_1(S) - a_1\lambda)m_1'(S) + \frac{a_2\lambda}{2}m_1''(S)\right]\Delta t + o(\Delta t). \tag{6}$$

Подставляя это выражение в (4), сокращая Δt и переходя к пределу $\Delta t \to 0$, получим

$$\frac{a_2\lambda}{2}m_1''(S) + (c_1(S) - a_1\lambda)m_1'(S) = -1. \tag{7}$$

Общее решение этого линейного дифференциального уравнения имеет вид

$$m_1(S) = -\frac{2}{a_2\lambda}\int\int \exp\left\{-\frac{2}{a_2\lambda}\int c_1(u)du + \frac{2a_1}{a_2}s\right\}\exp\left\{\frac{2}{a_2\lambda}\int c_1(u)du - \frac{2a_1}{a_2}t\right\}dsdt +$$

$$+D_1\int \exp\left\{-\frac{2}{a_2\lambda}\int c_1(u)du+\frac{2a_1}{a_2}s\right\}ds+E_1\,. \tag{8}$$

Заметим, что для этой области выполняется условие $c_1(S)<a_1\lambda$, поэтому для того, чтобы в $m_1(S)$ при $S\to\infty$ не было экспоненциально нарастающих членов надо положить $D_1=0$. Далее, так как управление $c(S)=c_1(S)$ прекращается при $S=S_1$, то должно быть $m_1(S_1)=0$, и это условие позволяет определить константу E_1 в (8). Таким образом, окончательно, если явный вид зависимости $c_1(S)$ задан, мы можем получить значение величины $m_1(S)$, но значение $c(S)=c_1(S)$ устанавливается, когда процесс $S(t)$ достигает порога S_2. Поэтому среднее время пребывания в состоянии $c(S)=c_1(S)$ равно $m_1=m_1(S_2)$.

Пусть теперь $c(S)=c_0$. Обозначим через $m_0(S)$ среднее время достижения процессом $S(t)$ порога S_2 при условии, что в начальный момент мы имеем значение капитала S. Тогда, как и выше,

$$m_0(S)=\Delta t+M\{m_0(S+\Delta S)\}\,. \tag{9}$$

Отличие от предыдущей ситуации заключается в том, что $M\{\Delta S\}=(c_0-a_1\lambda)\Delta t+o(\Delta t)$. Поэтому в этом случае $m_0(S)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{a_2\lambda}{2}m_0''(S)+(c_0-a_1\lambda)m_0'(S)=-1\,, \tag{10}$$

общее решение, которого имеет вид

$$m_0(S)=-\frac{S}{c_0-a_1\lambda}+D_0+E_0\cdot\exp\left(-2\frac{c_0-a_1\lambda}{a_2\lambda}S\right).$$

Чтобы при $S\to-\infty$ не было экспоненциально нарастающих членов надо положить $E_2=0$. Далее, верно условие $m_0(S_2)=0$. Поэтому

$$m_0(S)=\frac{S_2-S}{c_0-a_1\lambda}\,. \tag{11}$$

Но значение $c(S)=c_0$ устанавливается, когда процесс $S(t)$ достигает порога S_1. Поэтому среднее время пребывания в состоянии $c(S)=c_0$ равно

$$m_0=m_0(S_1)=\frac{S_2-S_1}{c_0-a_1\lambda}\;. \tag{12}$$

Обозначим через π_0 (π_1) финальную вероятность пребывания процесса в состоянии $c(S)=c_0$ ($c(S)=c_1(S)$). Из эргодических соображений следует, что $\pi_0\sim m_0$ и $\pi_1\sim m_1$. Так как $\pi_0+\pi_1=1$, то

$$\pi_0=\frac{m_0}{m_0+m_1}\,,\;\pi_1=\frac{m_1}{m_0+m_1}\,. \tag{13}$$

Подставляя сюда выражения для m_0 и m_1, получим явные выражения для π_0 и π_1.
Но, с другой стороны,

$$\pi_0=\int_{-\infty}^{S_2}p_0(S)dS=C_0\cdot\frac{a_2\lambda}{2(c_0-a_1\lambda)}\,, \tag{14}$$

$$\pi_1 = \int_{S_1}^{\infty} p_1(S)dS = C_1 \cdot \int_{S_1}^{\infty} \exp\left\{ \frac{2}{a_2\lambda} \int_{S_1}^{S} c_1(s)ds - \frac{2a_1}{a_2}(S - S_1) \right\} dS . \qquad (15)$$

Окончательно

$$C_0 = \frac{2(c_0 - a_1\lambda)}{a_2\lambda} \pi_0 = \frac{2(c_0 - a_1\lambda)}{a_2\lambda} \cdot \frac{m_0}{m_0 + m_1} , \qquad (16)$$

$$C_1 = \frac{\pi_1}{\int_{S_1}^{\infty} \exp\left\{ \frac{2}{a_2\lambda} \int_{S_1}^{S} c_1(s)ds - \frac{2a_1}{a_2}(S - S_1) \right\} dS} =$$

$$= \frac{1}{\int_{S_1}^{\infty} \exp\left\{ \frac{2}{a_2\lambda} \int_{S_1}^{S} c_1(s)ds - \frac{2a_1}{a_2}(S - S_1) \right\} dS} \cdot \frac{m_1}{m_0 + m_1} \qquad (17)$$

Таким образом, получены выражения, которые при заданном виде зависимости $c_1(S)$, позволяют рассчитать значения констант C_0 и C_1, и тем самым полностью определить вид плотности величины капитала при релейно-гистерезисном управлении.

Частный случай функциональной зависимости скорости изменения капитала

В качестве примера рассмотрим частный случай релейно-гистерезисного управления капиталом фонда, когда функциональная зависимость $c_1(S)$ имеет следующий вид

$$c_1(S) = \frac{c_0}{1 + \alpha(S - S_1)}, \ \alpha > 0 . \qquad (18)$$

В этом случае значение для плотности вероятностей капитала в области $c(S) = c_0$ определяется (3), а для области $c(S) = c_1(S)$, согласно (4), имеем

$$p_1(S) = C_1 \cdot \exp\left\{ -\frac{2a_1}{a_2}(S - S_1) \right\} [1 + \alpha(S - S_1)]^{2c_0/a_2\alpha\lambda}, \quad S > S_1 \qquad (19)$$

Определим константы C_0 и C_1, воспользуемся выражением (8) для нахождения величины $m_1(S)$ среднего времени достижения порога $S = S_1$, если в начальный момент капитала был равен S. Подставляя явный вид $c_1(S)$, получим

$$m_1(S) = -\frac{2}{a_2\lambda} \int\int \exp\left\{ \frac{2a_1}{a_2} s \right\} [1 + \alpha(s - S_1)]^{-2c_0/a_2\alpha\lambda} \exp\left\{ -\frac{2a_1}{a_2} t \right\} [1 + \alpha(t - S_1)]^{2c_0/a_2\alpha\lambda} dsdt +$$

$$+ D_1 \int \exp\left\{ \frac{2a_1}{a_2} s \right\} [1 + \alpha(s - S_1)]^{-2c_0/a_2\alpha\lambda} ds + E_1 . \qquad (20)$$

В последнем выражении из экономического смысла задачи константа $D_1 = 0$. Рассмотрим в выражении (19) внутренний интеграл. Используем для представления экспоненты стандартное разложение в ряд Тейлора,

$$\exp\left(-\frac{2a_1}{a_2} S \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{2a_1}{a_2} S \right)^k ,$$

после ряда очевидных преобразований получим

$$\int \exp\left\{-\frac{2a_1}{a_2}t\right\}\left[1+\alpha\left(t-S_1\right)\right]^{2c_0/a_2\alpha\lambda}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\left(\frac{2a_1}{a_2}\right)^k\int t^k\left[\left(1-\alpha S_1\right)+\alpha t\right]^{2c_0/a_2\alpha\lambda}dt\,.$$

Обозначим $\theta=2c_0/a_2\lambda\alpha$, тогда для интеграла в последнем выражении имеем

$$\int t^k\left[\left(1-\alpha S_1\right)+\alpha t\right]^{\theta}dt=\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i t^{k-i}\left[\left(1-\alpha S_1\right)+\alpha t\right]^{\theta+i+1}}{\alpha^{i+1}(\theta+1)\ldots(\theta+k+1)}\,.$$

Проделывая аналогичное преобразование со второй экспонентой под знаком интеграла в выражении (19) получим окончательный вид для $m_1(S)$

$$m_1(S)=-\frac{2}{a_2\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\left(\frac{2a_1}{a_2}\right)^k\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{\alpha^{i+1}(\theta+1)\ldots(\theta+k+1)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\cdot\left(\frac{2a_1}{a_2}\right)^p\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{k+p-i}\frac{(-1)^j S^{k+p-i-j}\left[\left(1-\alpha S_1\right)+\alpha t\right]^{j+i+1}}{\alpha^{j+1}(m+2)\ldots(p+k+2)}+E_1\,.$$

С учетом условия $m_1(S_1)=0$ полученное выражение дает возможность определить константу E_1, что полностью определяет вид $m_1(S)$.

$$E_1=\frac{2}{a_2\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\left(\frac{2a_1}{a_2}\right)^k\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{\alpha^{i+1}(\theta+1)\ldots(\theta+k+1)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\cdot\left(\frac{2a_1}{a_2}\right)^p\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{k+p-i}\frac{(-1)^j S^{k+p-i-j}\left[\left(1-\alpha S_1\right)+\alpha t\right]^{j+i+1}}{\alpha^{j+1}(m+2)\ldots(p+k+2)}\,.$$

Но значение $c(S)=c_1(S)$ устанавливается, когда процесс $S(t)$ достигает порога S_2. Поэтому среднее время пребывания в состоянии $c(S)=c_1(S)$ равно $m_1=m_1(S_2)$. Таким образом, окончательно получим

$$m_1=m_1(S_2)=\frac{2}{a_2\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\left(\frac{2a_1}{a_2}\right)^k\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{\alpha^{i+1}(\theta+1)\ldots(\theta+k+1)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\cdot\left(\frac{2a_1}{a_2}\right)^p\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{k+p-i}\frac{(-1)^j}{\alpha^{j+1}(m+2)\ldots(p+k+2)}\left\{S_1^{\,k+p-i-j}-\left[1+\alpha\left(S_2-S_1\right)\right]^{j+i+2}S_2^{k+p-i-j}\right\}. \qquad (21)$$

С учетом (12), (15) и (16), последнее выражение позволяет явно получить окончательный вид плотности распределения вероятностей величины капитала фонда.

Вероятностные характеристики деятельности фонда

В заключении приведем формулы, позволяющие вычислить две важнейшие характеристики деятельности фонда социального страхования.

Вероятность неплатежеспособности фонда

Фонд не может производить выплаты по страховым случаям, когда его капитал становится отрицательным. Вероятность этого события равна

$$\nu_0=P\{S<0\}=C_0\int_{-\infty}^{0}\exp\left(\frac{2}{a_2\lambda}(c_0-a_1\lambda)(S-S_2)\right)dS=\frac{m_0}{m_0+m_1}\exp\left(-\frac{2(c_0-a_1\lambda)}{a_2\lambda}S_2\right). \qquad (22)$$

Вероятность выделения денег на социальные расходы.

Деньги на социальные расходы выделяются при $S > S_1$. Вероятность этого события равна

$$\pi_1 = \int_{S_1}^{\infty} p_1(S)dS = \frac{m_1}{m_0 + m_1}. \tag{23}$$

Где

$$m_0 = m_0(S_1) = \frac{S_2 - S_1}{c_0 - a_1\lambda},$$

а величину m_1, необходимо рассчитывать с учетом явного вида зависимости $c_1(S)$.

С другой стороны полученные характеристики определяют возможную стратегию управления фондом социального страхования. Задавая значения вероятностей π_0 и π_1 с естественным условием $\nu_0 + \pi_1 < 1$, можно определить параметры релейно-гистерезисного управления деятельностью фонда S_1, S_2, если известен явный вид для функции $c_1(S)$.

Заключение

В настоящей работе рассмотрена приближенная модель деятельности фонда социального страхования, в которой процесса изменения капитала фонда $U(t)$ процесс $S(t)$ описывается как некоторый диффузионный случайный процесс. Связь между двумя процессами осуществляется через коэффициенты сноса и диффузии процесса $S(t)$.

В этих условиях исследован случай релейно-гистерезисного управления капиталом такого фонда. Получены стационарные плотности вероятностей величины капитала и найдены некоторые вероятностные характеристики деятельности фонда: вероятность неплатежеспособности фонда и вероятность выделения средств на финансирование социальных программ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Panjer H.H., Willmot G.E. Insurance Risk Models. – Society of Actuaries, 1992. – 442 p.
2. Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов. – М.: Изд-во «Мир», 1971. – 263 с.
3. Маталыцкий М.А., Романюк Т.В. Анализ вероятностной модели обработки однотипных рисков в страховой компании в нестационарном режиме. – Вестник ГрГУ, 2002, сер. 2, №1.
4. Кац В.М., Лившиц К.И., Назаров А.А. Исследование нестационарных бесконечно линейных систем массового обслуживания и их применение к анализу экономико-математических моделей // Вестник ТГУ. 2002, №275. – с.189-192.
5. Змеев О.А. Математические модель функционирования страховой компании с учетом банковского процента // Изв. вузов Физика, 2001, №1. – с. 19-24.
6. Змеев О.А. Модель функционирования страховой компании при интенсивности входящего потока, зависящего от числа клиентов // Математическое моделирование. Кибернетика. Информатика. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999. – с. 67-73
7. Адашкин Л Ф. Математическая модель фонда социального страхования (диффузионное приближение). // Материалы Всероссийской научно-практической конферен-

ции «Информационные технологии и математическое моделирование». Анжеро-Судженск, 15 ноября 2002 г., Томск: Изд-во «Твердыня», 2002. – с 14 - 18.

8. Змеев О.А. Математические модель фонда социального страхования с детерминированными расходами на социальные программы (диффузионное приближение) // Изв. вузов Физика, 2003, №3. – с. 83-87.
9. Змеев О.А. Математические модель фонда социального страхования со случайными расходами на социальные программы (диффузионное приближение) // Изв. вузов Физика, 2003, №3. – с. 88-93.
10. Радюк Л. Е., Терпугов А. Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. – Томск.: Изд-во Томск. ун-та, 1988. – 174 с.

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 2003 г.