На правах рукописи

ЗМЕЕВ ОЛЕГ АЛЕКСЕЕВИЧ

Исследование математических моделей процессов страхования при нестационарных потоках страховых рисков

05. 13. 18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Томск – 2005

Работа выполнена в Томском государственном университете.

Научный консультант	доктор физико-математических наук, профессор Терпугов А. Ф.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Данилов Н. Н. доктор физико-математических наук, профессор Кошкин Г. М. доктор физико-математических наук, профессор Топчий В. А.
Ведущая организация:	Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук (г. Красноярск)

Защита состоится 19 мая 2005 года в 10.30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.08 при Томском государственном университете по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, корп. 2, ауд. 102.

Отзывы на автореферат (в двух экземплярах, заверенные печатью) просьба направлять по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, Томский государственный университет, ученому секретарю Н.Ю. Буровой

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан 12 апреля 2005 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор технических наук, доцент Скворцов А. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и состояние проблемы

Страхование, как отрасль экономики, обязано своим возникновением тому, что многие области человеческой деятельности связаны с риском случайных потерь. Они возникают в результате нежелательных происшествий, таких, например, как пожары, дорожно-транспортные катастрофы, несчастные случаи, потеря трудоспособности и т. п. Страхование уменьшает риск путем передачи его профессиональным страховым компаниям, которые, принимая на себя за определенную плату случайные риски финансовых потерь из независимых источников, снижают их опасность путем объединения.

Основы современной актуарной математики были заложены работами Ф. Лундберга и Х. Крамера, в которых была предложена и исследована так называемая классическая модель процесса страхования, основанная на следующих предположениях: процесс поступления страховых премий в компанию считается детерминированным, за время t приращение капитала равно ct, где c – количество средств, поступивших в компанию за единицу времени; страховые выплаты – независимые, одинаково распределенные случайные величины; моменты страховых выплат образуют пуассоновский поток. Описание и различного рода исследования в рамках классической модели можно найти в монографиях [Э. Штрауба, Д. Кокса и В. Смита ,Y. H. Panjer и G. E. Willmont, J. Grandell, H. U. Gerber, Н. У. Прабху], обзорах [В. И. Роторя и В. Е. Бенинга, П. Эмбрехтса и К. Клюппенберта, В. Калашникова и Д. Константинидиса]. Основным достоинством классической модели является ее относительная простота, которая позволяет вычислить в явном виде такие характеристики, как вероятности разорения и выживания страховой компании.

В большинстве работ последнего времени рассматриваются более сложные модели, обобщающие классическую модель. В рамках этих работ процесс поступления страховых премий в компанию также считается случайным процессом. Так, например, в работе К. И. Лившица находятся вероятность разорения и условное время до разорения для случая, когда страховые премии, поступающие в компанию, образуют пуассоновский процесс. В работах М. А. Маталыцкого, Т. В. Романюк страховая компания рассматривается, как некоторая система массового обслуживания В работах К. И. Лившица и Л. Ю. Сухотиной рассмотрены характеристики страховой компании при малой нагрузке страховой премии для пуассоновской модели и модель страховой компании с учетом сезонных изменений. В работах В. Е. Бенинга и В. Ю. Королева исследуется случай, когда моменты страховых выплат образуют процесс Кокса. Неоднородный поток страховых выплат рассматривается в работе О. П. Виноградова.

Большое внимание уделяется также проблемам, связанным с возможностью страховой компании использовать имеющиеся в ее распоряжении свободные средства для получения дополнительной прибыли и уменьшения тем самым вероятности разорения. Е. В. Глуховой и Е. В. Капустиным рассчитывались вероятности выживания страховой компании при размещении части средств на депозитных вкладах, а в последних работах Е. В. Капустина учитывается возможность одновременного наступления страховых случаев. Минимизации вероятности разорения путем выбора инвестиционной стратегии посвящены работы Т. А. Белкиной, А. Г. Фроловой, С. В. Чекалиной, А. В. Бойкова и А. В. Мельникова, в которых предполагается возможность как безрисковых, так и рисковых инвестиций.

В перечисленных выше работах исследуется, как правило, стационарный режим функционирования страховой компании, когда ее характеристики можно считать не зависящими от текущего времени. Однако, остается еще много проблем, требующих дополнительного исследования. К числу малоизученных можно отнести такие проблемы, как: описание математических моделей страхования в виде многомерных случайных процессов, учет нестационарности и случайности потоков входящих рисков, управление величиной страховых премий в зависимости от состояния страховой компании, вопросы конкурентного взаимодействия страховых компаний на рынке страховых услуг

С другой стороны, кроме классических страховых компаний, в Российской Федерации на рынке страховых услуг существуют объекты, в деятельности которых активную роль играет государство. Построению и исследованию математических моделей таких объектов в последние годы посвящен ряд работ, в которых для исследования работы государственных фондов применяются различные методы теории массового обслуживания или идеи классических моделей страхования. Например, в работе Л Ф. Адашкина строится диффузионная аппроксимация для математической модели деятельности фонда социального страхования РФ. В работах А. А. Назарова, И. Р.Гарайшиной, Я. В. Галайко исследуются математические модели фондов пенсионного страхования.

С математической точки зрения, многие вопросы, связанные с исследованием деятельности неклассических страховых фондов, сводятся к задачам управления так называемыми процессами разорения. Описание и обзор основных результатов различного рода исследований по этой тематике можно найти, например, в седьмой главе монографии Л. Такача. К публикациям последнего времени, посвященным исследованию процессов разорения, можно отнести работы А. Т. Семенова. Тем не менее, построение и исследование математических моделей государственных фондов социального страхования на сегодняшний день по-прежнему актуально.

К сожалению, при исследованиях реальных экономических процессов не всегда возможно получить строгие аналитические результаты и поэтому достаточно часто при этом применяются различного рода приближенные методы. Для оценки области их применимости или в случаях, когда аналитические результаты невозможно получить, используются методы имитационного моделирования. Одним из самых распространенных методов имитационного моделирования является так называемый метод дискретно-событийного моделирования [А. М. Лоу и В. Д. Кельтон].

Основной трудностью в рамках дискретно-событийного метода является правильное определение переменных состояния, необходимых для реализации моделирования с корректной последовательностью событий и получением интересующей статистики. В связи с этой сложностью необходимо отметить работу L. W. Schruben, который в 1993 году предложил метод представления событий с помощью графов, и работы T. K. Som и R. G. Sargent, в рамках которых этот метод был значительно усовершенствован.

В последнее время в качестве возможного пути реализации имитационных моделей рассматривается объектно-ориентированное моделирование. Основные идеи применения объектно-ориентированного подхода к вопросу построения имитационных моделей можно найти, например, в работах J. A. Levasseur и D. W. Jones, S. D. Roberts. На сегодняшний день фактическим стандартом в области объектно-ориентированного анализа и проектирования (OOA&D) является использование Унифицированного Языка Моделирования (UML, Unified Modeling Language). UML непосредственно унифицирует известные методы Г. Буча, Д. Рамбо (OMT) и А. Джекобсона, при этом он обладает гораздо большими возможностями.

Другим фактором, оказывающим принципиальное влияние на современный процесс реализации программных комплексов, являются вопросы, связанные с так называемым повторным использованием кода. Поэтому, в последнее время возрастает значение каркасов приложений, с помощью которых объектно-ориентированные системы можно использовать повторно в максимальной степени. Обычно в рамках каркаса активно используются типовые решения проектирования (паттерны, шаблоны проектирования). Концепция типовых решений была предложена C. Alexander, S. Ishikawa, M. Silverstein, M. Jacobson, I. Fiksdahl-King, S. Angel, а в области разработки программного обеспечения идея применения паттернов подробно изложена в классической монографии Э. Гаммы, Р. Хемла, Р. Джонсона, Дж. Влиссидеса. В качестве примера работы последнего времени, посвященной тематике применения типовых решений при разработке информационных систем, приведем монографию М. Фаулера.

В представленной работе исследуются модели, учитывающие вышеизложенные факты, что, по мнению автора, и определяет ее актуальность. Исследованию деятельности страховой компании при нестационарных потоках страховых рисков посвящены первые три главы настоящей работы. Наиболее близкими по тематике к вопросам, рассматриваемым в этих главах, являются работы Д. Д. Ахмедовой, А. Ф. Терпугова, В. М. Каца, К. И. Лившица и А. А. Назарова, А. Ю. Голубина, С. А. Масяйкина, в которых рассматривается влияние расходов на рекламу на деятельность страховой компании и исследуется конкурентное взаимодействие страховых компаний на общем страховом поле. В четвертой главе настоящей работы предлагается и исследуется математическая модель Фонда социального страхования Российской Федерации, основанная на адаптации классической модели страхования с учетом особенностей деятельности фонда. И, наконец, последние две главы настоящей работы посвящены разработке каркаса приложений имитационного моделирования в рамках дискретно-событийного метода. Применимость каркаса исследуется на основе построения программного комплекса, предназначенного для моделирования работы страховых компаний, рассмотренных в теоретической части диссертации.

Цель работы

1. Разработать математическую модель страховой компании в виде двумерного случайного процесса, компонентами которого являются капитал компании и число застрахованных рисков, и исследовать вероятностные характеристики этой модели.

2. Построить и изучить характеристики страховой компании в случае, когда интенсивность потока входящих рисков зависит от времени и когда она является случайным процессом (дважды стохастические модели потока входящих рисков).

3. Рассмотреть конкурентное взаимодействие двух страховых компаний на общем рынке страховых услуг.

4. Рассмотреть вопросы управления величиной страховой премии в зависимо-

сти от интенсивности потока входящих рисков.

5. Построить математическую модель влияния рекламы на деятельность страховой компании.

6. Построить и изучить математическую модель фонда социального страхования.

7. Построить каркас приложений имитационного моделирования страховых компаний и систем массового обслуживания дискретно-событийным методом, и создать программный комплекс такого имитационного моделирования.

Научная новизна

Теоретическая ценность работы, по мнению автора, состоит в том, что в ней предложены и исследованы математические модели страховых компаний в виде двумерного случайного процесса.

Оригинальным является подход, предложенный автором для построения математической модели фонда социального страхования. Исследования, основанные на этом подходе, могут быть продолжены.

Практическая значимость

Практическая ценность работы, по мнению автора, заключается в том, что полученные в ней результаты могут быть использованы для прогнозирования деятельности страховых компаний и фондов социального страхования. Разработанный программный комплекс может быть использован для имитационного моделирования деятельности страховых компаний в различных предположениях, а также для других систем массового обслуживания, имитационное моделирование которых проводится дискретно-событийным методом.

Кроме того, практическая значимость диссертационной работы подтверждается двумя актами об использовании теоретических результатов проведенных исследований в деятельности реальных объектов страхового рынка.

Достоверность результатов и методика исследований

Исследование носило теоретический характер и проводилось с использованием аппарата теории вероятностей, теории случайных процессов, теории массового обслуживания, теории управления, методов оптимизации, методов объектно-ориентированного анализа и проектирования.

Достоверность результатов диссертации обеспечивается корректностью математических выкладок и результатами имитационного моделирования.

На защиту выносятся

Основные научные результаты, полученные автором и выносимые на защиту, состоят в следующем:

1. Разработана математическая модель страховой компании в виде двумерного случайного процесса, компонентами которого являются капитал компании и число застрахованных рисков. Получены вероятностные характеристики этих процессов для случаев неограниченного и ограниченного страхового поля.

2. Найдены характеристики капитала страховой компании и числа застрахованных рисков в случае, когда интенсивность потока входящих рисков зависит от

времени и когда она является случайным процессом (дважды стохастические модели потока входящих рисков).

3. Рассмотрено конкурентное взаимодействие двух страховых компаний на общем рынке страховых услуг и построено переговорное множество (множество Парето) для такого взаимодействия.

4. Рассмотрены вопросы управления величиной страховой премии и найдено оптимальное управление ею в зависимости от интенсивности потока входящих рисков.

5. Построена математическая модель влияния рекламы на деятельность страховой компании и найдено оптимальное управление средствами, отводимыми на рекламу в период рекламной кампании.

6. Построена математическая модель фонда социального страхования и найдены основные вероятностные характеристики капитала фонда при релейно-гистерезисном управлении.

7. Построен каркас приложений имитационного моделирования страховых компаний и систем массового обслуживания дискретно-событийным методом и создан программный комплекс, реализующий имитационное моделирование для рассмотренных в диссертации моделей.

Апробация работы

Основные положения диссертации и отдельные её результаты докладывались и обсуждались на Межрегиональной научно-практической конференции «Наука и образование: пути интеграции» (Анжеро-Судженск, 1998), Научно-теоретической конференции «Образование и наука на пороге третьего тысячелетия» (Барнаул, 1999), Межрегиональной научно-практической конференции «Качество образования и наука» (Анжеро-Судженск, 1999), Межрегиональной научно-методической конференции «Повышение эффективности научных исследований и совершенствование учебного процесса» (Анжеро-Судженск, 2000), Всероссийской научно-практической конференции «Математическое моделирование экономических систем и процессов» (Чебоксары, 2000), II научно-практической конференции «Наука и образование» (Белово, 2000), Международной научно-практической конференции «Методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике» (Новочеркасск, 2001), III международной научно-теоретической конференции «Образование и наука в третьем тысячелетии» (Барнаул, 2001), Всероссийской научно-практической конференции «Новые технологии и комплексные решения: наука, образование производство» (Анжеро-Судженск, 2001), Международной научно-методической конференции «Новые информационные технологии в университетском образовании» (Кемерово, 2002), Межрегиональной VI научно-практической конференции «Научное творчество молодежи» (Анжеро-Судженск, 2002), II международной конференции «Проблемы актуарной и финансовой математики» (Минск, 2002), I, II, III Всероссийских конференциях по финансово-актуарной математике и смежным вопросам (Красноярск, 2002, 2003, 2004), IV Всероссийской конференции с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» (Томск, 2002), Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование» (Анжеро-Судженск, 2002), Всероссийской научно-практической конференции «Наука и практика: диалоги нового века» (Анжеро-Судженск, 2003), VIII Всероссийской научно-практической конференции «Научное творчество молодежи» (Анжеро-Судженск, 2004), V Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Кисловодск, 2004), 8th Korea - Russia International Symposium on Science and Technology KORUS 2004 (Tomsk, 2004).

Публикации и личный вклад автора

По теме диссертации опубликовано 68 печатных работ, в том числе 20 – в журналах, рекомендованных ВАК для опубликования основных научных результатов докторских диссертаций, 19 работ опубликовано без соавторов.

Диссертационная работа и все результаты, лежащие в ее основе, выполнена при непосредственном участии автора на всех этапах. Ему в большинстве случаев принадлежит постановка задачи исследования, теоретическое описание и анализ полученных результатов. Исключение составляют работы, выполненные автором под руководством А. Ф. Терпугова, монография в соавторстве с Е. В. Глуховой и К. И. Лившицем, в которой автору принадлежит четвертая глава, объем которой составляет третью часть работы, и статьи, опубликованные совместно с Д. Д. Ахмедовой и А. Н. Моисеевым, в которых, по мнению автора, разделить научный вклад не представляется возможным. Остальные работы опубликованы в соавторстве с аспирантами и студентами, которые в различное время работали под руководством автора.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения, изложенных на 331 странице, включая 64 рисунка, и списка литературы, который содержит 217 наименований. Условно предлагаемую диссертационную работу можно разбить на три части. В первой части, в которую входят главы I–III, предлагаются и исследуются математические модели страховой компании в виде двумерного случайного процесса, компонентами которого являются капитал компании и число застрахованных рисков, при различных предположениях относительно числа застрахованных рисков, капитала компании, влияния рекламы и т.д.

В первой главе рассмотрены математические модели страховых компаний в предположениях, что поток входящих рисков является стационарным марковским потоком. Параграф 1.1 посвящен исследованию модели, в которой интенсивность входящего потока линейно зависит от числа уже имеющихся рисков, а страховое поле считается неограниченным. В 1.1.1 относительно рассматриваемой модели делаются следующие предположения: будем описывать состояние страховой компании в момент времени t двумерным случайным вектором $\{k(t), S(t)\}$, где $k(t)$ – число рисков, застрахованных компанией, а $S(t)$ – ее капитал в момент времени t. Изменения капитала и числа застрахованных рисков происходят в следующих случаях:

1. Компания страхует новый риск. Будем предполагать, что поток приходящих рисков – это примитивный поток с параметром $\lambda+\beta_\xi k(t)$. Первое слагаемое отражает поток рисков, которые клиенты страхуют в компании по независящим от нее обстоятельствам, а второе – тот факт, что среди людей, не застраховавших свои риски, распространяется информация о страховой компании, происходит неявная реклама компании. Вероятность того, что за время Δt компания застрахует новый

риск, равна $(\lambda+\beta_{\xi}\,k)\Delta t+o(\Delta t)$. Каждый новый риск приносит компании страховую премию ξ, размер которой является случайной величиной с функцией распределения $F_{\xi}(z)$ и моментами $M\{\xi\}=a$, $M\{\xi^2\}=a_2$.

2. Будем считать далее, что по каждому из застрахованных рисков с интенсивностью λ_{ζ} выплачивается взнос в размере ζ, который является случайной величиной с функцией распределения $F_{\zeta}(z)$ и моментами $M\{\zeta\}=c$ и $M\{\zeta^2\}=c_2$. Будем считать, что взносы вносятся независимо друг от друга и поэтому за время Δt в компанию поступит такой взнос с вероятностью $k\lambda_{\zeta}\Delta t+o(\Delta t)$.

3. Страховое время некоторых рисков заканчивается. Будем считать, что каждый риск покидает компанию независимо от поведения других рисков с интенсивностью μ. Тогда за время Δt компанию покинет риск с вероятностью $k\mu\Delta t+o(\Delta t)$.

4. Наконец, наступают страховые случаи. Будем считать, что с каждым клиентом может наступить страховой случай с интенсивностью μ_{η} и эти страховые случаи для различных рисков независимы. Тогда на интервале Δt наступит страховой случай с вероятностью $k\mu_{\eta}\Delta t+o(\Delta t)$, а компания при этом выплатит страховое возмещение в размере η, которое является случайной величиной с функцией распределения $F_{\eta}(z)$ и моментами $M\{\eta\}=b$, $M\{\eta^2\}=b_2$.

Целью исследования является рассмотрение статистических характеристик процессов $k(t)$ и $S(t)$, т. е. поведение числа рисков и капитала компании.

В 1.1.2-1.1.7 проведены исследования модели в предположении, что процесс $k(t)$ находится в стационарном режиме. Полученные результаты сформулированы в виде следующих утверждений и теорем:

Теорема 1.1. В предположениях 1) – 4) π_j - финальные вероятности того, что число рисков компании равно j, определяются соотношениями

$$\pi_0=\frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\prod\limits_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda+i\beta_{\xi}}{(i+1)\mu}},$$

$$\pi_k=\frac{\prod\limits_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda+i\beta_{\xi}}{(i+1)\mu}}{1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\prod\limits_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda+i\beta_{\xi}}{(i+1)\mu}}\ \text{для}\ \forall\, k=\overline{1,\infty}, \qquad (1.2)$$

а условие существования стационарного режима имеет вид $\beta_{\xi}/\mu<1$.

Так как полученные выражения для финальных вероятностей являются достаточно громоздкими и «неудобными» для дальнейшего использования, то было рассмотрено так называемое диффузионное приближение, когда процесс $k(t)$ аппроксимируется диффузионным процессом. Для нахождения такого приближения использовался асимптотический метод анализа марковизируемых систем. С учетом следующих обозначений

$$\rho=\lambda/\mu,\ \varphi=\beta_{\xi}/\mu.\ \frac{1}{\rho}=\varepsilon^2,\ \varepsilon^2 j=\kappa+\varepsilon x,\ \frac{1}{\varepsilon}\pi_j=P(x,\varepsilon).$$

доказана теорема 1.2.

Теорема 1.2. Если

1. существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} P(x,\varepsilon) = P(x)$,
2. функция $P(x,\varepsilon)$ дважды дифференцируема по x,

то функция $P(x)$ удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка вида

$$(1-\varphi)\frac{d}{dx}\left(xP(x)\right)+\frac{1}{1-\varphi}\frac{d^2}{dx^2}\left(P(x)\right)=0\,. \tag{1.5}$$

При этом константа $\kappa = 1/(1-\varphi)$.

Таким образом, показано, что при $\rho\to\infty$ число рисков является асимптотически нормальной величиной с $M\{k\}=\dfrac{\rho}{1-\varphi}=\dfrac{\lambda}{\mu-\beta}$ и $D\{k\}=\dfrac{\rho}{(1-\varphi)^2}=\dfrac{\lambda\mu}{(\mu-\beta)^2}$.

Теорема 1.3. В стационарном режиме функция корреляции процесса $k(t)$ определяется выражением

$$R_{0k}(\tau)=R_k(\tau)-M^2\{k\}=\frac{\rho}{(1-\varphi)^2}\exp\{-\left(\mu-\beta_\xi\right)|\tau|\}. \tag{1.8}$$

Теорема 1.4. В стационарном для числа рисков режиме математическое ожидание капитала $M\{S_t\}$ определяется выражением

$$M\{S_t\}=S_0+\frac{\lambda t}{\mu-\beta_\xi}\left(\mu a+\lambda_\zeta c-\mu_\eta b\right), \tag{1.14}$$

где S_0 капитал компании в момент t_0.

Таким образом, условие возрастания среднего капитала имеет вид $\mu a+\lambda_\zeta c-\mu_\eta b>0$, если $\mu a+\lambda_\zeta c-\mu_\eta b<0$, компания разоряется. Нетрудно заметить, что полученное условие имеет достаточно естественное экономическое обоснование, в среднем доходы компании должны превышать ее расходы.

Теорема 1.5. В стационарном для числа рисков режиме дисперсия капитала $D\{S_t\}$ определяется выражением

$$D\{S_t\}=\left[a_2\mu+c_2\lambda_\zeta+b_2\mu_\eta+\frac{2\mu}{\left(\mu-\beta_\xi\right)^2}\left(a\beta_\xi+c\lambda_\zeta-b\mu_\eta\right)^2\right]\frac{\lambda}{\mu-\beta_\xi}t+$$
$$+\left(a\beta_\xi+c\lambda_\zeta-b\mu_\eta\right)^2\frac{2\lambda\mu}{\left(\mu-\beta_\xi\right)^4}\left(\exp\{-\left(\mu-\beta_\xi\right)t\}-1\right). \tag{1.17}$$

Из равенства (1.17) следует, что при больших t дисперсия капитала, так же как и его среднее, растет пропорционально времени t .

Теорема 1.6. Функция корреляции $\operatorname{cov}\{S_t,k(t+t_0)\}$ процессов S_t и $k(t)$ в стационарном режиме для числа рисков имеет вид

$$\operatorname{cov}\{S_t,k(t+t_0)\}=\left(a\beta_\xi-b\mu_\eta-c\lambda_\zeta\right)\frac{\lambda\mu}{\left(\mu-\beta_\xi\right)^3}\left[1-\exp\{-(\mu-\beta)t\}\right]. \tag{1.21}$$

Теорема 1.7. Функция корреляции процесса S_t $R_{0s}(t_1,t_2)$ в стационарном режиме для числа рисков определяется выражением

$$R_{0s}(t_1,t_2)=\left[a_2\beta_\xi+b_2\mu_\eta+c_2\lambda_\zeta+\frac{2\mu}{\left(\mu-\beta_\xi\right)^2}\left(a\beta_\xi-b\mu_\eta-c\lambda_\zeta\right)^2\right]\frac{\lambda\mu}{\mu-\beta_\xi}+$$

$$+\left(a\beta_\xi - b\mu_\mu + c\lambda_\zeta\right)^2 \frac{\lambda\mu}{\left(\mu-\beta_\xi\right)^4}\left[e^{-(\mu-\beta_\xi)t_1} + e^{-(\mu-\beta_\xi)t_2} - e^{-(\mu-\beta_\xi)(t_2-t_1)} - 1\right], \qquad (1.22)$$

В 1.1.8 получены характеристики $k(t)$ в нестационарном режиме.

Теорема 1.8. В нестационарном режиме среднее число рисков $\overline{k(t)}$, дисперсия числа рисков $D_k(t)$ и функция корреляции числа рисков $R_{0k}(t_1,t_2)$ определяются выражениями

$$\overline{k(t)} = \frac{\lambda}{\mu-\beta_\xi} - \left(\frac{\lambda}{\mu-\beta_\xi} - i_0\right)\exp\left\{-\left(\mu-\beta_\xi\right)t\right\}, \qquad (1.25)$$

$$D_k(t) = \frac{2\lambda\mu}{\left(\mu-\beta_\xi\right)^2}\left(1-\exp\left\{-2\left(\mu-\beta_\xi\right)t\right\}\right) +$$

$$+\frac{\mu+\beta_\xi}{\mu-\beta_\xi}\left(i_0 - \frac{\lambda}{\mu-\beta_\xi}\right)\exp\left\{-\left(\mu-\beta_\xi\right)t\right\}\left(1-\exp\left\{-\left(\mu-\beta_\xi\right)t\right\}\right), \qquad (1.26)$$

$$R_{0k}(t_1,t_2) = D_k\left(\min(t_1,t_2)\right)\exp\left\{-\left(\mu-\beta_\xi\right)\left|t_2-t_1\right|\right\}. \qquad (1.27)$$

где i_0 число рисков, застрахованных в компании в момент t_0.

В 1.1.9 рассмотрено поведение капитала страховой компании $S(t)$ в нестационарном режиме для числа рисков:

Теорема 1.9. В нестационарном режиме для числа рисков режиме математическое ожидание капитала $M\{S_t\}$ и дисперсия капитала $D\{S_t\}$ определяются выражениями

$$M\{S_t\} = S_0 + \frac{1}{\mu-\beta_\xi}\left(a\beta_\xi - \mu_\eta b + \lambda_\zeta c\right)\left(i_0 - \frac{\lambda}{\mu-\beta_\xi}\right) + t\frac{\lambda}{\mu-\beta_\xi}\left(\beta_\xi a - \mu_\eta b + \lambda_\zeta c\right) -$$

$$-\frac{1}{\mu-\beta_\xi}\left(a\beta_\xi - \mu_\eta b + \lambda_\zeta c\right)\left(i_0 - \frac{\lambda}{\mu-\beta_\xi}\right)\exp\left(-\left(\mu-\beta_\xi\right)t\right), \qquad (1.30)$$

$$D\{S_t\} = \frac{1}{\mu-\beta_\xi}\left(\beta_\xi a_2 + \mu_\eta b_2 + \lambda_\zeta c_2\right)\left(i_0 - \frac{\lambda}{\mu-\beta_\xi}\right) +$$

$$+\left(\beta_\xi a - \mu_\eta b + \lambda_\xi c\right)^2\left\{\frac{\lambda+5\beta_\xi+5\mu}{6\left(\mu-\beta_\xi\right)^3}\left(i_0 - \frac{\lambda}{\mu-\beta_\xi}\right) + \frac{2}{3\left(\mu-\beta_\xi\right)^3}\left(i_0^{\,2} - \frac{\lambda}{\left(\mu-\beta_\xi\right)^2}(\lambda+\mu)\right)\right\} +$$

$$+t\left\{\frac{\lambda}{\mu-\beta_\xi}\left(\beta_\xi a_2 + \mu_\eta b_2 + \lambda_\zeta c_2\right) + \left(\beta_\xi a - \mu_\eta b + \lambda_\zeta c\right)^2 \times\right.$$

$$\left.\times\left\{\frac{\lambda}{\left(\mu-\beta_\xi\right)^2}\left(i_0 - \frac{3\lambda}{\mu-\beta_\xi}\right) + \frac{\lambda(\lambda+\mu)}{\left(\mu-\beta_\xi\right)^2}\right\}\right\} -$$

$$-e^{-(\mu-\beta_\xi)t}\left\{\frac{1}{\mu-\beta}\left(\beta_\xi a_2 + \mu_\eta b_2 + \lambda_\xi c_2\right)\left(i_0 - \frac{\lambda}{\mu-\beta_\xi}\right) +\right.$$

$$\left.+\left(\beta_\xi a - \mu_\eta b + \lambda_\xi c\right)^2\left\{\frac{\lambda\left(\lambda+2\mu+\beta_\xi\right)}{\left(\mu-\beta_\xi\right)^4} - i_0^2\frac{1}{\left(\mu-\beta_\xi\right)^2} + i_0\frac{\lambda-\mu}{\left(\mu-\beta_\xi\right)^3}\right\}\right\} +$$

$$+te^{-(\mu-\beta_\xi)t}\left(a\beta_\xi-\mu_\eta b+\lambda_\zeta c\right)^2\left(i_0-\frac{\lambda}{\mu-\beta_\zeta}\right)\frac{2\beta_\xi-5\lambda-2\mu}{2(\mu-\beta_\xi)^2}+$$

$$+e^{-2(\mu-\beta_\xi)t}\left(a\beta_\xi-\mu_\eta b+\lambda_\zeta c\right)^2\left(i_0-\frac{\lambda}{\mu-\beta_\xi}\right)\frac{3\lambda+\beta_\xi+\mu}{2(\mu-\beta_\xi)^2}+$$

$$+\frac{e^{-3(\mu-\beta_\xi)t}\left(a\beta_\xi-\mu_1 b+\lambda_\zeta c\right)^2}{3(\mu-\beta_\xi)^3}\left\{i_0^2-\frac{\lambda(\lambda+\mu)}{(\mu-\beta_\xi)^2}-\frac{2\lambda+\beta_\xi+\mu}{\mu-\beta_\xi}\left(i_0-\frac{\lambda}{\mu-\beta_\xi}\right)\right\}. \quad (1.31)$$

Среднее значение капитала компании в нестационарном режиме при больших t растет пропорционально t, аналогично стационарному случаю. Дисперсия капитала при больших t растет, как t.

При сравнении соответствующих выражений при условии, что число рисков стационарно, и при условии, что оно нестационарно, можно отметить, что в нестационарном режиме есть дополнительное слагаемое, пропорциональное отклонению начального числа рисков i_0 от стационарного значения. Именно это слагаемое и описывает переходный режим.

В параграфе 1.2 рассмотрен случай, когда потенциальный рынок страховых услуг (страховое поле), на котором действует компания, ограничен, т.е. число рисков, которые может застраховать компания, ограничено. Пусть N – максимально возможное число рисков, за бесконечно малый промежуток времени Δt каждый из N потенциальных рисков может застраховаться с вероятностью $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$. Риск не может быть застрахован повторно, пока не истечет срок текущего договора. Величину $k(t)$, по-прежнему, будем считать числом застрахованных в компании рисков. Тогда суммарный поток поступления рисков в компанию будет примитивным потоком с интенсивностью $(N-k(t))\lambda$.

В отличие от модели, рассмотренной в предыдущем параграфе, вероятность поступления в компанию нового риска за время Δt в этом случае равна $(N-k)\lambda\,\Delta t+o(\Delta t)$. По-прежнему в этой ситуации компания получает страховую премию ξ, размер которой является случайной величиной с функцией распределения $F_\xi(z)$, $M\{\xi\}=a$ и $M\{\xi^2\}=a_2$.Остальные вероятности, связанные с приходом и уходом рисков, аналогичны модели с бесконечным страховым полем, которую мы рассмотрели выше.

Целью исследования, как и ранее, является рассмотрение статистических характеристик процессов $k(t)$ и $S(t)$, т. е. поведения числа застраховавшихся рисков и капитала компании в стационарном и нестационарном режимах.

В 1.2.2 доказаны следующие утверждения:

Теорема 1.10. Для модели с ограниченным страховым полем π_j - финальные вероятности того, что число рисков компании равно j, определяются соотношениями

$$\pi_0=(1+\rho)^{-N},$$

$$\pi_j=C_N^j\rho^j(1+\rho)^{-N}, \text{ для } \forall\ j=\overline{1,\ N}, \quad (1.37)$$

где $\rho=\lambda/\mu$.

Теорема 1.11. При $N\to\infty$ в стационарном режиме распределение числа рисков является асимптотически нормальным с

$$M\{k\}=\frac{N\rho}{1+\rho}=\frac{N\lambda}{\lambda+\mu},$$

$$D\{k\}=\frac{N\rho}{(1+\rho)^2}=\frac{N\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}.$$

Далее в 1.2.3 – 1.2.7 исследована деятельность компании в предположении, что число застрахованных рисков стационарно. Результаты сформулированы в виде следующих теорем:

Теорема 1.12. В стационарном режиме функция корреляции процесса $k(t)$ определяется выражением

$$R_{0k}(\tau)=R_k(\tau)-M^2\{k\}=\frac{N\rho}{(1+\rho)^2}\exp(-(\lambda+\mu)|\tau|). \quad (1.42)$$

Теорема 1.13. В стационарном для числа рисков режиме математическое ожидание капитала $M\{S_t\}$ определяется выражением

$$M\{S_t\}=S_0+\frac{N\rho t}{1+\rho}\left(\lambda_\zeta c-\mu_\eta b+\mu a\right), \quad (1.48)$$

где S_0 капитал компании в момент t_0.

Таким образом, условие возрастания среднего капитала и в этом случае имеет вид $\mu a+\lambda_\zeta c-\mu_\eta b>0$. Если $\mu a+\lambda_\zeta c-\mu_\eta b<0$, компания разоряется.

Теорема 1.14. В стационарном для числа рисков режиме дисперсия капитала $D\{S_t\}$ определяется выражением

$$D\{S_t\}=\left[a_2\mu+b_2\mu_\eta+c_2\lambda_\zeta+\frac{2\mu}{(\lambda+\mu)^2}\left(a\lambda-b\mu_\eta+c\lambda_\zeta\right)^2\right]\frac{N\rho}{1+\rho}t+$$
$$+\left(a\lambda-b\mu_\eta+c\lambda_\zeta\right)^2\frac{2N\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^4}\left(\exp\{-(\lambda+\mu)t\}-1\right). \quad (1.51)$$

Теорема 1.15. Функция корреляции $\operatorname{cov}\{S_t,k(t+t_0)\}$ процессов S_t и $k(t)$ в стационарном режиме для числа рисков имеет вид

$$\operatorname{cov}\{S_t,k(t+t_0)\}=\left(c\lambda_\zeta-a\lambda-b\mu_\eta\right)\frac{N\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^3}\left[1-\exp\{-(\lambda+\mu)t\}\right]. \quad (1.55)$$

Теорема 1.16. Функция корреляции процесса S_t $R_{0s}(t_1,t_2)$ в стационарном режиме для числа рисков определяется выражением

$$R_s(t_1,t_2)=\left[a_2\mu+b_2\mu_\eta+c_2\lambda_\zeta+\frac{2\mu}{(\lambda+\mu)^2}\left(a\lambda-b\mu_\eta+c\lambda_\zeta\right)^2\right]\frac{N\lambda\mu}{\lambda+\mu}+$$
$$+\left(a\lambda-b\mu_\eta+c\lambda_\zeta\right)^2\frac{N\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^4}\left[e^{-(\lambda+\mu)t_1}+e^{-(\lambda+\mu)t_2}-1-e^{-(\lambda+\mu)(t_2-t_1)}\right], \quad (1.56)$$

Аналогично параграфу 1.1.9 в 1.2.9 получены характеристики $k(t)$ в нестационарном режиме. В результате доказана следующая теорема:

Теорема 1.17. В нестационарном режиме среднее число рисков $\overline{k(t)}$, дисперсия числа рисков $D_k(t)$ и функция корреляции числа рисков $R_{0k}(t_1,t_2)$ определяются выражениями

$$\overline{k(t)} = \frac{N\lambda}{\lambda+\mu} + \left(i_0 - \frac{N\lambda}{\lambda+\mu} \right) \exp\{-(\lambda+\mu)t\}. \tag{1.59}$$

$$D_k(t) = \frac{2N\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}\left(1 - \exp\{-2(\lambda+\mu)t\}\right) +$$

$$+\frac{N\lambda+\mu}{\lambda+\mu}\left(i_0 - \frac{N\lambda}{\lambda+\mu} \right)\exp\{-(\lambda+\mu)t\}\left(1-\exp\{-(\lambda+\mu)t\}\right), \tag{1.60}$$

$$R_{0k}(t_1,t_2) = D_k(\min(t_1,t_2))\exp\{-(\lambda+\mu)|t_2-t_1|\}. \tag{1.61}$$

где i_0 - число рисков, застрахованных в компании в момент t_0.

В 1.2.10 рассмотрено поведение капитала страховой компании $S(t)$ в нестационарном режиме для числа рисков:

Теорема 1.18. В нестационарном режиме для числа рисков режиме математическое ожидание капитала $M\{S_t\}$ и дисперсия капитала $D\{S_t\}$ определяются выражениями

$$M\{S_t\} = S_0 + \frac{1}{\lambda+\mu}\left(\lambda_\zeta c - a\lambda - \mu_\eta b\right)\left(i_0 - \frac{N\lambda}{\lambda+\mu}\right) + t\frac{N\lambda}{\lambda+\mu}\left(\lambda_\zeta c + \mu a - \mu_\eta b\right) -$$

$$-\frac{1}{\lambda+\mu}\left(\lambda_\zeta c - a\lambda - \mu_\eta b\right)\left(i_0 - \frac{N\lambda}{\lambda+\mu}\right)\exp\left(-(\lambda+\mu)t\right), \tag{1.65}$$

$$D\{S_t\} = \frac{1}{\lambda+\mu}\left(\mu_\eta b_2 - \lambda a_2 + \lambda_\zeta c_2\right)\left(i_0 - \frac{N\lambda}{\lambda+\mu}\right) +$$

$$+\left(\lambda a - \mu_\eta b + \lambda_\zeta c\right)^2\left\{\frac{N\lambda - 5\lambda + 5\mu}{6(\lambda+\mu)^3}\left(i_0 - \frac{N\lambda}{\lambda+\mu}\right) + \frac{2}{3(\lambda+\mu)^3}\left({i_0}^2 - \frac{N\lambda}{(\lambda+\mu)^2}(N\lambda+\mu)\right)\right\} +$$

$$+t\left\{\frac{N\lambda}{\lambda+\mu}\left(\mu_\eta b_2 - \lambda a_2 + \lambda_\zeta c_2\right) + \left(\lambda a - \mu_\eta b + \lambda_\zeta c\right)^2 \times\right.$$

$$\left.\times\left\{\frac{N\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\left(i_0 - \frac{3N\lambda}{\lambda+\mu}\right) + \frac{N\lambda(N\lambda+\mu)}{(\lambda+\mu)^2}\right\}\right\} -$$

$$-e^{-(\lambda+\mu)t}\left\{\frac{1}{\lambda+\mu}\left(\mu_\eta b_2 - \lambda a_2 + \lambda_\zeta c_2\right)\left(i_0 - \frac{N\lambda}{\lambda+\mu}\right) +\right.$$

$$\left.+\left(\lambda a - \mu_\eta b + \lambda_\zeta c\right)^2\left\{\frac{N\lambda(N\lambda + 2\mu - \lambda)}{(\lambda+\mu)^4} - i_0^2\frac{1}{(\lambda+\mu)^2} + i_0\frac{\lambda-\mu}{(\lambda+\mu)^3}\right\}\right\} +$$

$$+te^{-(\lambda+\mu)t}\left(\lambda a - \mu_\eta b + \lambda_\zeta c\right)^2\left(i_0 - \frac{N\lambda}{\lambda+\mu}\right)\frac{2\lambda - 5N\lambda - 2\mu}{2(\lambda+\mu)^2} +$$

$$+e^{-2(\lambda+\mu)t}\left(\lambda a - \mu_\eta b + \lambda_\zeta c\right)^2\left(i_0 - \frac{N\lambda}{\lambda+\mu}\right)\frac{3N\lambda - \lambda + \mu}{2(\lambda+\mu)^2} +$$

$$+\frac{e^{-3(\lambda+\mu)t}\left(\lambda a - \mu_\eta b + \lambda_\zeta c\right)^2}{3(\lambda+\mu)^3}\left\{ i_0^2 - \frac{N\lambda(N\lambda+\mu)}{(\lambda+\mu)^2} - \frac{2N\lambda - \lambda + \mu}{\lambda+\mu}\left(i_0 - \frac{N\lambda}{\lambda+\mu}\right)\right\}. \tag{1.66}$$

Среднее значение капитала компании в нестационарном режиме растет пропорционально t, аналогично стационарному случаю. Дисперсия капитала при больших t растет, как t.

При сравнении соответствующих выражений при условии, что число рисков стационарно и при условии, что оно нестационарное, можно отметить, что в нестационарном режиме есть дополнительное слагаемое, пропорциональное отклонению начального числа рисков i_0 от стационарного значения. Именно это слагаемое и описывает переходный режим.

В параграфе 1.3. в отличие от моделей, рассмотренных в 1.1. и 1.2 , делается дополнительное предположение относительно поведения капитала компании. Считается, что за время Δt капитал компании увеличится на $r\,S(t)\Delta t$, где r – ставка банковского процента.

Как показано выше, в ситуациях, когда входящий поток рисков является стационарным марковским потоком, исследование моделей необходимо начинать с определения вероятностных характеристик процесса $k(t)$. Однако из найденных ранее соотношений следует, что характеристики процесса $k(t)$ могут быть определены независимо от капитала компании $S(t)$. Поэтому дополнительно были исследованы только характеристики капитала компании. (1.3.2-1.3.4).

Теорема 1.19. Для моделей с учетом банковского процента в стационарном для числа рисков режиме математическое ожидание капитала компании определяется выражением

$$S_1(t) = S_0 \cdot e^{rt} + \frac{a_1 + b_1 M\{k(t)\}}{r} \cdot \left(e^{rt} - 1\right), \tag{1.82}$$

где S_0 – стартовый капитал компании.

Следствие. Математическое ожидание капитала компании в стационарном режиме для модели с неограниченным страховым полем равно

$$M\{S(t)\} = S_0 \cdot e^{rt} + \frac{\lambda(\mu a + \lambda_\zeta c - \mu_\eta b)}{r \cdot (\mu - \beta_\xi)} \cdot \left(e^{rt} - 1\right). \tag{1.86}$$

Для модели с ограниченным страховым полем

$$M\{S(t)\} = S_0 \cdot e^{rt} + \frac{\lambda N(\mu a + \lambda_\zeta c - \mu_\eta b)}{r(\lambda + \mu)} \cdot \left(e^{rt} - 1\right). \tag{1.87}$$

Заметим, что при $r = 0$ выражения (1.86) и (1.87) превращаются в соотношения (1.14) и (1.48) соответственно.

Теорема 1.20. Дисперсия капитала страховой компании для модели с работающим капиталом в стационарном для числа рисков режиме определяется выражениями

$$D\{S(t)\} = \left(\lambda a_2 + \left(\lambda_\zeta c_2 + \mu_\eta b_2 + \lambda a_2\right)\frac{\lambda}{\mu - \beta_\xi}\right)\frac{e^{2rt} - 1}{2r} +$$

$$+ c^2 \cdot \frac{N\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2} \frac{(r - (\lambda + \mu))e^{2rt} - 2re^{(r - (\lambda + \mu))t} + r + \lambda + \mu}{r\left(r^2 - (\lambda + \mu)^2\right)} + e^{2rt} S_0^2$$

для модели с неограниченным страховым полем и

$$D\{S(t)\} = \left(\lambda N a_2 + \left(\lambda_\zeta c_2 + \mu_\eta b_2 - \lambda a_2\right)\frac{N\lambda}{\lambda + \mu}\right)\frac{e^{2rt} - 1}{2r} +$$

$$+c^2\cdot\frac{N\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}\frac{(r-(\lambda+\mu))e^{2rt}-2re^{(r-(\lambda+\mu))t}+r+\lambda+\mu}{r\left(r^2-(\lambda+\mu)^2\right)}+e^{2rt}S_0^2$$

для модели с ограниченным страховым полем, где S_0 – стартовый капитал компании.

Наконец, функция корреляции капитала компании определяется выражением

$$R(t_1,t_2)=(a_2+b_2M\{k\})\frac{\operatorname{sh}(r(t_1+t_2))}{r}+$$

$$+b_1^2e^{rt_1}e^{rt_2}\cdot D\{k\}\cdot\frac{\theta e^{-2rt_1+(\theta+r)t_2}-r\cdot e^{(\theta+r)(t_2-t_1)}+r\cdot e^{(r-\theta)t_1}-\theta e^{(\theta+r)t_2}+r\cdot e^{(\theta+r)t_2}-r}{r\left(r^2-\theta^2\right)},$$

где b_1, a_2, b_2, $M\{k\}$, $D\{k\}$ и θ, параметры соответствующих моделей.

В параграфе 1.4. рассматривается проблема конкурентного взаимодействия двух страховых компаний, действующих на общем страховом рынке. В этом случае потоки страховых премий, поступающих в каждую из компаний, делаются зависимыми друг от друга. В рамках параграфа рассматривается модель страховой компании, основанная на следующих предположениях:

1. С вероятностью $\lambda_i\Delta t+o(\Delta t)$ в i-ую компанию поступает новый риск. Клиенты, страхующие риски, вносят страховые премии, являющиеся случайными величинами с математическим ожиданием a_i. Риски поступают независимо друг от друга.

2. Время страхования некоторых рисков заканчивается, и клиенты покидают компанию. Считается, что каждый клиент уходит из компании с вероятностью $\mu\Delta t+o(\Delta t)$ независимо от другого.

3. С вероятностью $\lambda_\zeta\Delta t+o(\Delta t)$ каждый из клиентов компании уплачивает дополнительный взнос, который является случайной величиной с математическим ожиданием c.

4. Наконец, с вероятностью $\mu_\eta\,\Delta t+o(\Delta t)$ у каждого из клиентов компании независимо от других наступает страховой случай, выплата по которому является случайной величиной с математическим ожиданием b. Заметим, что в этом случае скорость роста капитала K равна

$$K=\frac{dM\{S(t)\}}{dt}=\lambda\left(a+\frac{c\lambda_\zeta-b\mu_\eta}{\mu}\right). \tag{1.102}$$

В дальнейшем комбинацию $(c\lambda_\zeta-b\mu_\eta)/\mu$ будем обозначать через δ.

В 1.4.2 описана модель взаимодействия страховых компаний. Считается, что интенсивности прихода клиентов в ту или иную компанию λ_i зависят от величин страховых взносов a_1 и a_2, то есть $\lambda_i=\lambda_i(a_1,a_2)$. Далее, довольно естественно считать, что эти вероятности обратно пропорциональны величине страховых взносов, т. е. $\lambda_1/\lambda_2=a_2/a_1$. Если

$$f(a_1,a_2)=\lambda_1(a_1,a_2)+\lambda_2(a_1,a_2).$$

Тогда

$$\lambda_1=\frac{a_2}{a_1+a_2}f(a_1,a_2),\ \lambda_2=\frac{a_1}{a_1+a_2}f(a_1,a_2). \tag{1.103}$$

Вид зависимости $f(a_1, a_2)$ от a_1 и a_2 определить достаточно сложно. В настоящей работе мы будем считать, что $f(a_1, a_2)$ зависит лишь от некоторого параметра p, который, в свою очередь, зависит от a_1 и a_2, так что $p = p(a_1, a_2)$. Относительно вида функции $f(p)$ естественно выдвинуть следующие предположения:

1. $f(0) < +\infty$;
2. $f(p)$ монотонно убывает с ростом p;
3. $\lim\limits_{p \to +\infty} f(p) = 0$;
4. $\lim\limits_{p \to +\infty} pf(p) = 0$.

Что касается самой зависимости $p(a_1, a_2)$, то к ней можно предъявить следующие достаточно естественные требования. Пусть a_2 фиксировано, тогда:

1. Если $a_1 \to +\infty$, то p должно равняться a_2, так как при этих условиях вся динамика рынка страхования будет определяться именно этой величиной, клиенты просто будут игнорировать первую компанию. Таким образом, сформулируем следующее утверждение:

$$\lim_{a_1 \to +\infty} p(a_1, a_2) = a_2 .$$

2. С уменьшением a_1 $p(a_1, a_2)$ также должно монотонно убывать, так как у желающих застраховаться в этом случае появляется возможность выбора. Поэтому должно выполняться следующее условие:

$$\frac{\partial p(a_1, a_2)}{\partial a_1} > 0 .$$

3. При $a_1 \to 0$ $p(a_1, a_2)$ также должна стремиться к нулю, так как в этом случае страховаться будут все потенциальные клиенты, следовательно,

$$\lim_{a_1 \to 0} p(a_1, a_2) = 0 .$$

4. Наконец, $p(a_1, a_2)$ должно быть симметричной функцией относительно переменных a_1 и a_2, т. е. $p(a_1, a_2) = p(a_2, a_1)$.

По-видимому, достаточно правдоподобной является следующая зависимость p от a_1 и a_2:

$$\frac{1}{p^{\nu}} = \frac{1}{a_1^{\nu}} + \frac{1}{a_2^{\nu}}, \tag{1.104}$$

удовлетворяющая всем вышеперечисленным условиям и напоминающая среднее геометрическое с некоторым параметром $\nu > 0$. В данной работе будем считать, что

$$p = \frac{a_1 a_2}{\sqrt[\nu]{a_1^{\nu} + a_2^{\nu}}}. \tag{1.105}$$

Таким образом, выражения (1.103) можно записать в следующем виде:

$$\lambda_1 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} f(p),\ \lambda_2 = \frac{a_1}{a_1 + a_2} f(p), \tag{1.106}$$

тогда

$$K_1 = \frac{a_2(a_1 + \delta_1)}{a_1 + a_2} f(p),\ K_2 = \frac{a_1(a_2 + \delta_2)}{a_1 + a_2} f(p). \tag{1.107}$$

Цель каждой из компаний состоит в том, чтобы, выбирая величину средней страховой премии a_i, максимизировать величину капитала компании. С математической точки зрения получившаяся задача представляет собой кооперативную игру двух лиц с ненулевой суммой. В основе решения получившейся игры лежит построение переговорного множества (множества Парето), на котором происходит согласование стратегий игроков. В работе предложен алгоритм построения переговорного множества для различных значений ν и δ, рассмотрено несколько конкретных примеров его построения.

Во второй главе диссертации исследуется математическая модель функционирования страховой компании при нестационарном марковском потоке входящих страховых рисков.

В параграфе 2.1. описывается модель страховой компании. Предполагается, что

1. Компания страхует новый риск. Будем предполагать, что поток приходящих рисков – это пуассоновский поток с переменной интенсивностью с параметром $\lambda(t)$. Вероятность того, что за время Δt компания застрахует новый риск, равна $\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$. Каждый новый риск приносит компании страховую премию ξ, размер которой является случайной величиной с функцией распределения $F_\xi(z)$ и моментами $M\{\xi\} = a_1(t)$, $M\{\xi^2\} = a_2(t)$. Так как величина первого страхового взноса – это прерогатива компании и может устанавливаться по её усмотрению, то будем считать, что $a_1(t)$, $a_2(t)$ зависят от времени и являются величинами, которыми можно управлять. Также предположим, что $a_1(t)$, $a_2(t)$ могут быть функциями, имеющими разрывы первого рода.

2. Будем считать далее, что по каждому из застрахованных рисков регулярно с интенсивностью λ_ζ выплачивается взнос в размере ζ, который является случайной величиной с функцией распределения $F_\zeta(z)$ и моментами $M\{\zeta\} = c_1$ и $M\{\zeta^2\} = c_2$. Будем считать, что взносы вносятся независимо друг от друга и поэтому за время Δt в компанию поступит такой взнос с вероятностью $k\lambda_\zeta \Delta t + o(\Delta t)$.

3. Страховое время некоторых рисков заканчивается. Будем считать, что каждый риск покидает компанию независимо от поведения других рисков с интенсивностью μ. Тогда за время Δt компанию покинет риск с вероятностью $k\mu\Delta t + o(\Delta t)$.

4. Наконец, наступают страховые случаи. Будем считать, что с каждым клиентом может наступить страховой случай с интенсивностью μ_η и эти страховые случаи для различных рисков независимы. Тогда на интервале Δt наступит страховой случай с вероятностью $k\mu_\eta \Delta t + o(\Delta t)$, а компания при этом выплатит страховое возмещение в размере η, которое является случайной величиной с функцией распределения $F_\eta(z)$ и моментами $M\{\eta\} = b_1$, $M\{\eta^2\} = b_2$.

В параграфе 2.2. предполагается, что параметр потока $\lambda(t)$ – непрерывная функция или функция, имеющая разрывы только первого рода. В 2.2.1. определяются выражения для характеристик капитала и числа застрахованных рисков в случае неограниченного страхового поля.

Теорема 2.1. В предположениях 1) – 4) математическое ожидание $k_1(t)=M\{k(t)\}$, дисперсия $D_k(t)$ и функция ковариации числа застрахованных рисков $C_k(t_1,t_2)$ определяются выражениями

$$k_1(t)=k(t_0)e^{-\mu(t-t_0)}+\int\limits_{t_0}^{t}\lambda(z)e^{-\mu(t-z)}dz\,, \tag{2.1}$$

$$D_k(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\left[\lambda(z)+\mu k_1(z)\right]e^{-2\mu(t-z)}dz, \tag{2.2}$$

$$C_k(t_1,t_2)=k_1(\min(t_1,t_2))e^{-\mu|t_2-t_1|}, \tag{2.3}$$

где $k(t_0)$ число рисков в начальный момент времени.

Теорема 2.2. В предположениях 1) – 4) математическое ожидание $S_1(t)$ и дисперсия капитала компании $D_S(t)$ определяются выражениями

$$S_1(t)=S_0+\int\limits_0^t a_1(u)\lambda(u)du-\frac{b_1\mu_\eta-c_1\lambda_\zeta}{\mu}\times$$

$$\times\left[\int\limits_0^t\lambda(v)\left(1-e^{-\mu(t-v)}\right)dv+\left(1-e^{-\mu t}\right)\int\limits_{-\infty}^{0}\lambda(v)e^{\mu v}dv\right], \tag{2.21}$$

где S_0 капитал компании в момент t_0.

$$D_S(t)=\int\limits_0^t a_2(z)\lambda(z)dz+$$

$$+\int\limits_0^t k_1(z)\left[\left(b_2\mu_\eta+c_2\lambda_\zeta\right)+2\frac{\left(b_1\mu_\eta-c_1\lambda_\zeta\right)^2}{\mu}\left(1-e^{-\mu(t-z)}\right)\right]dz\,, \tag{2.22}$$

где, для простоты $S_0=0$.

Теорема 2.3. В предположениях 1) – 4) функция ковариации капитала и числа застрахованных рисков $C_{Sk}(t)$ определяется выражением

$$C_{Sk}(t)=\left(c_1\lambda_\zeta-b_1\mu_\eta\right)\left\{\int\limits_0^t u\lambda(t-u)e^{-\mu u}du+te^{-\mu t}\int\limits_{-\infty}^{0}\lambda(u)e^{\mu u}du\right\} \tag{2.35}$$

В 2.2.2. определены выражения для тех же что и в 2.2.1 характеристик капитала и числа рисков в случае ограниченного страхового поля (теоремы 2.4-2.6).

Теорема 2.4. Для модели с ограниченным страховым полем математическое ожидание, дисперсия и функция ковариации числа застрахованных рисков определяются выражениями

$$k_1(t)=k(t_0)e^{-\mu(t-t_0)-\int_{t_0}^{t}\lambda(x)dx}+N\int\limits_{t_0}^{t}\lambda(z)e^{-\mu(t-z)-\int_z^t\lambda(x)dx}dz\,, \tag{2.39}$$

$$D_k(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\left(N\lambda(z)+k_1(z)(\mu-\lambda(z))e^{-2\mu(t-z)-2\int_z^t\lambda(x)dx}\right)dz\,, \tag{2.40}$$

$$C_k(t_1,t_2)=D_k(\min(t_1,t_2))e^{-\mu|t_2-t_1|-\int_{\min(t_1,t_2)}^{\max(t_1,t_2)}\lambda(x)dx}\,, \tag{2.41}$$

где $k(t_0)$ число рисков в начальный момент времени.

Теорема 2.5. Для модели с ограниченным страховым полем математическое ожидание $S_1(t)$, дисперсия капитала $D_S(t)$ определяются выражениями:

$$S_1(t)=S_0+\int_0^t Na_1(u)\lambda(u)du-\int_0^t k_1(u)a_1(u)\lambda(u)du-\left(b_1\mu_\eta-c_1\lambda_\zeta\right)\int_0^t k_1(u)du\,, \quad (2.54)$$

где S_0 – капитал в начальный момент времени,

$$D_S(t)=N\int_0^t a_2(u)\lambda(u)du+\left(b_2\mu_\eta+c_2\lambda_\zeta\right)\int_0^t k_1(u)du-$$

$$-\int_0^t k_1(u)a_2(u)\lambda(u)du+2\left(b_1\mu_\eta-c_1\lambda_\zeta\right)^2\int_0^t\left(\int_0^z C_k(z,u)du\right)dz$$

$$+2\left(b_1\mu_\eta-c_1\lambda_\zeta\right)\int_0^t\left(\int_0^z C_k(z,u)\left[a_1(u)\lambda(u)+a_1(z)\lambda(z)\right]du\right)dz+$$

$$+2\int_0^t\left(\int_0^z C_k(z,u)a_1(u)\lambda(u)a_1(z)\lambda(z)du\right)dz\,, \quad (2.55)$$

где, для простоты, $S_0=0$.

Теорема 2.6. Для модели с ограниченным страховым полем, функция ковариации капитала и числа застрахованных рисков $C_{Sk}(t)$ определяется выражением

$$C_{Sk}(t)=\left(c_1\mu_\eta-b_1\lambda_\zeta\right)\int_0^t C_k(t,u)du-\int_0^t C_k(t,u)a_1(u)\lambda(u)du\,, \quad (2.71)$$

где $C_k(t,u)$ выражается формулой (2.41).

В 2.2.3. предполагается, что $a_1(t)$ влияет на интенсивность потока входящих рисков, так как уменьшение $a_1(t)$ приводит к увеличению $\lambda(t)$ и, наоборот, при увеличении $a_1(t)$ число желающих застраховаться уменьшается. Поэтому в общем случае предполагается, что λ зависит от $a_1(t)$ и от t.

Предположение 5). Для конкретизации будем считать, что

$$\lambda(t)=F\left(a_1(t)\right)\lambda_0(t), \quad (2.74)$$

где $F(0)=1$, $F(+\infty)=0$ и $F(a_1)$ монотонно убывает с ростом $a_1(t)$, $\lambda_0(t)$ имеет смысл максимальной интенсивности потока входящих рисков.

Теорема 2.7. В предположениях 1) – 5) оптимальное управление $a_1(v)$, $0\le v\le T$, доставляющее максимум среднему значению капитала в конце рассматриваемого промежутка, определяется из уравнения

$$a_1(v)+\frac{F\left(a_1(v)\right)}{F'\left(a_1(v)\right)}=\frac{b_1\mu_\eta-c_1\lambda_\zeta}{\mu}\left(1-e^{-\mu(T-v)}\right). \quad (2.75)$$

В параграфе 2.3 предполагается, что параметр входящего потока $\lambda(t)$ – непрерывный в средне квадратичном стационарный случайный процесс.

Предположение 6). Пусть характеристики $\lambda(t)$:

$$M\{\lambda(t)\}=\overline{\lambda},$$
$$M\{\lambda(t_1)\lambda(t_2)\}=R(t_2-t_1),$$

$$R(z) = R_0(z) + \overline{\lambda}^2,$$
$$\lim_{z\to\infty} R_0(z) = 0.$$

В 2.3.1. и 2.3.2 определяются выражения для характеристик числа застрахованных рисков и капитала для неограниченного страхового поля.

Теорема 2.8. В предположениях 1) – 4), 6) математическое ожидание, дисперсия и функция ковариации числа застрахованных рисков определяются выражениями

$$M_\lambda\{k_1(t)\} = \frac{\overline{\lambda}}{\mu}, \tag{2.81}$$

$$\widetilde{D}_k(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty R_0(v)e^{-\mu v}dv + \frac{\overline{\lambda}}{\mu}, \tag{2.81}$$

$$\widetilde{C}_k(t_1,t_2) = \frac{\overline{\lambda}}{\mu}e^{-\mu|t_2-t_1|} + \frac{e^{-\mu|t_2-t_1|}}{2\mu}\int_{-\infty}^{|t_2-t_1|} R_0(v)e^{\mu v}dv + \frac{e^{\mu|t_2-t_1|}}{2\mu}\int_{|t_2-t_1|}^{\infty} R_0(v)e^{-\mu v}dv. \tag{2.82}$$

Теорема 2.9. В предположениях 1) – 4), 6) математическое ожидание $M_\lambda\{S_1(t)\}$ и дисперсия $\widetilde{D}_S(t)$ капитала компании определяются выражениями

$$M_\lambda\{S_1(t)\} = S_0 + \overline{\lambda}\int_0^t a_1(v)dv + \frac{c_1\lambda_\zeta - b_1\mu_\eta}{\mu}\overline{\lambda}t,$$

$$\widetilde{D}_S(t) = \overline{\lambda}\int_0^t a_2(z)dz + \left[b_2\mu_\eta + c_2\lambda_\zeta + \frac{2}{\mu}\left(b_1\mu_\eta - c_1\lambda_\zeta\right)^2\right]\times$$
$$\times\left[\frac{\overline{\lambda}}{\mu}t\right] + \frac{2}{\mu}\left(b_1\mu_\eta - c_1\lambda_\zeta\right)^2\frac{\overline{\lambda}}{\mu^2}\left(e^{-\mu t}-1\right) + \int_0^t\int_0^t R_0(u-v)a_1(u)a_1(v)dudv + \left(\frac{b_1\mu_\eta - c_1\lambda_\zeta}{\mu}\right)^2\times$$
$$\times\left\{2\int_0^t R_0(x)\left(t - x - \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2}e^{-\mu x} - e^{-\mu t} + 1 - e^{-\mu(t-x)} + \frac{1}{2}e^{-2\mu t+\mu x}\right)\right)dx + \right.$$
$$+\left(1-e^{-\mu t}\right)^2\frac{1}{\mu}\int_0^\infty R_0(x)e^{-\mu x}dx + 2\left(1-e^{-\mu t}\right)\frac{1}{\mu}\left[\int_{-\infty}^{-t} R_0(x)\left(\frac{1}{2}e^{\mu(x+t)} - e^{\mu x} + \frac{1}{2}e^{-\mu(t-x)}\right)dx + \right.$$
$$\left.\left. + \int_{-t}^{0} R_0(x)\left(1 - e^{\mu x} - \frac{1}{2}e^{-\mu(t+x)} + \frac{1}{2}e^{-\mu(t-x)}\right)dx\right]\right\} + 2\frac{c_1\lambda_\zeta - b_1\mu_\eta}{\mu}\times$$
$$\times\left[\int_0^t\int_0^t R_0(u-v)a_1(v)\left(1-e^{-\mu(t-u)}\right)dudv + \left(1-e^{-\mu t}\right)\int_{-\infty}^0\left(\int_0^t R_0(u-v)a_1(u)e^{\mu v}du\right)dv\right], \tag{2.86}$$

где S_0 – значение капитала в начальный момент времени.

В 2.3.3 предполагается, что величина a_1, обозначающая средние первоначальные взносы является функцией, зависящей от $\lambda_0(t)$.

Предположение 7). Пусть $a_1 = a_1(\lambda_0(t))$. Рассмотрим случай, когда интенсивность потока рисков $\lambda(t)$, страхующихся в компании, связана с $\lambda_0(t)$ соотношением

$$\lambda(t) = \lambda_0(t)F(a_1(\lambda_0(t))). \tag{2.95}$$

Выражение (2.95) имеет следующий смысл: $\lambda_0(t)$ есть интенсивность потока рисков, желающих застраховаться, но реально каждый риск страхуется с вероятностью $F(a_1)$ зависящей, естественно, от величины взноса a_1, таким образом, интенсивность потока рисков, которые будут застрахованы, равна $\lambda(t)=\lambda_0(t)F(a_1)$. Желание управлять этой интенсивностью изменяя величину страхового взноса a_1, находит свое отражение в том, что a_1 из константы превращается в функцию от $\lambda_0(t)$, т.е. $a_1=a_1(\lambda_0(t))$.

Теорема 2.11. В предположениях 1) – 4), 7) оптимальное управление $a_1=a_1(\lambda_0(t))$, реализующее максимальный темп роста среднего значения капитала определяется как решение уравнения

$$F(a_1)+\left(a_1+\frac{c_1\lambda_\zeta-b_1\mu_\eta}{\mu}\right)F'(a_1)=0. \tag{2.100}$$

Теорема 2.12. Пусть $\lambda_0(u)\equiv\lambda_1$ и $\lambda_0(v)\equiv\lambda_2$ имеют совместную плотность распределения вероятностей

$$p(\lambda_1,\lambda_2,w)=p_0(\lambda_1,\lambda_2,w)+p(\lambda_1)p(\lambda_2),$$
$$\lim_{w\to\infty}p_0(\lambda_1,\lambda_2,w)=0,$$

тогда в предположениях 1) – 4), 7) асимптотическое поведение дисперсии капитала определяется выражением

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\widetilde{D}_S(t)}{t}=\int_0^\infty p(\lambda_0)a_2(\lambda_0)\lambda_0F(a_1(\lambda_0))d\lambda_0+$$

$$+\frac{1}{\mu}\left(b_2\mu_\eta+c_2\lambda_\zeta+2\frac{(c_1\lambda_\zeta-b_1\mu_\eta)^2}{\mu}\right)\int_0^\infty p(\lambda_0)\lambda_0F(a_1(\lambda_0))d\lambda_0-$$

$$-2\int_0^\infty\int_0^\infty a_1(\lambda_1)a_1(\lambda_2)\lambda_1\lambda_2F(a_1(\lambda_1))F(a_1(\lambda_2))\pi(\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2+$$

$$+2\left(\frac{b_1\mu_\eta-c_1\lambda_\zeta}{\mu}\right)^2\int_0^\infty\int_0^\infty\lambda_1\lambda_2F(a_1(\lambda_1))F(a_1(\lambda_2))\pi(\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2+$$

$$+4\frac{c_1\lambda_\zeta-b_1\mu_\eta}{\mu}\int_0^\infty\int_0^\infty\{\lambda_1\lambda_2a_1(\lambda_1)F(a_1(\lambda_1))F(a_1(\lambda_2))\}\pi(\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2. \tag{2.104}$$

Теорема 2.13. В предположениях 1) – 4), 7) в случае экспоненциально распределенных первоначальных страховых взносов оптимальное управление страховыми взносами, реализующее максимум среднего темпа роста капитала при ограничении на флуктуацию этого капитала, то есть

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_\lambda\{S(t)\}}{t}\Rightarrow\max\ \text{при}\ \lim_{t\to\infty}\frac{\widetilde{D}_S(t)}{t}=D_0,$$

определяется из уравнения

$$p(\lambda_1)\lambda_1\left\{F(a_1(\lambda_1))+\left(a_1(\lambda_1)+\frac{c\lambda_\zeta-b\mu_\eta}{\mu}\right)F'(a_1(\lambda_1))+\right.$$

$$+l\left[4a_1(\lambda_1)F(a_1(\lambda_1))+\left(2a_1^2(\lambda_1)+\frac{1}{\mu}\left(b_2\mu_\eta+c_2\lambda_\zeta+2\frac{(c_1\lambda_\zeta-b_1\mu_\eta)^2}{\mu}\right)\right)F'(a_1(\lambda_1))\right]\Bigg\}+$$

$$+2l\lambda_1\left\{\{F(a_1(\lambda_1))+a_1(\lambda_1)F'(a_1(\lambda_1))\}\int_0^\infty a_1(\lambda_2)\lambda_2F(a_1(\lambda_2))\pi(\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_2+\right.$$

$$+\left[\left(\frac{c_1\lambda_\zeta-b_1\mu_1}{\mu}\right)^2F'(a_1(\lambda_1))+2\left(\frac{c_1\lambda_\zeta-b_1\mu_\eta}{\mu}\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times(F(a_1(\lambda_1))+a_1(\lambda_1)F'(a_1(\lambda_1)))\right]\int_0^\infty\lambda_2F(a_1(\lambda_2))\pi(\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_2\right\}=0. \qquad (2.109)$$

В третьей главе исследуются математическая модель страховой компании с учетом расходов на рекламу.

В параграфе 3.1 дается описание модели. Считается, что в момент времени t состояние страховой компании характеризуется её капиталом $S(t)$ и числом застрахованных рисков $k(t)$. Далее будем считать, что компания отчисляет часть своего капитала на рекламную компанию, так что на интервале $[t, t+\Delta t]$ на её проведение выделяется $\alpha(t)S(t)\Delta t$ денег, где $\alpha(t)$ – доля капитала, выделяемая на рекламу в единицу времени.

1. С вероятностью $(\lambda_0+\alpha(t)\lambda_1 S(t))\Delta t+o(\Delta t)$ в компанию придёт новый риск и, страхуясь, внесёт страховую плату ξ, которая является случайной величиной с функцией распределения $F_\xi(x)$. Слагаемое $\alpha(t)\lambda_1 S(t)$ описывает приток новых рисков, обусловленный рекламой, параметр λ_0 определяет интенсивность прихода рисков, не находящихся под воздействием рекламы; параметр λ_1 определяет эффективность рекламы.

2. С вероятностью $\mu_\eta k(t)\Delta t+o(\Delta t)$ произойдёт страховой случай и компания выплатит страховое возмещение в размере η, которое является случайной величиной с функцией распределения $F_\eta(x)$. Будем считать, что страховые случаи независимы.

3. С вероятностью $\lambda_\zeta k(t)\Delta t+o(\Delta t)$ поступит очередной взнос ζ от застраховавшихся в компании рисков, который является случайной величиной с функцией распределения $F_\zeta(x)$. Предполагается, что взносы осуществляются независимо друг от друга.

4. Наконец, с вероятностью $\mu k(t)\Delta t+o(\Delta t)$ прекращается действие страхового договора и один из рисков покинет компанию независимо от других рисков.

В параграфе 3.2 исследуется модель для случая неограниченного страхового поля. В 3.2.1 находятся выражения математического ожидания капитала и числа рисков компании:

$$\bar{k}(t)=C_1e^{\gamma_1 t}+C_2e^{\gamma_2 t}+\frac{\alpha\lambda_0}{\gamma_1\gamma_2},$$

$$\bar{S}(t)=\frac{1}{\lambda_1\alpha}\left[C_1(\gamma_1+\mu)e^{\gamma_1 t}+C_2(\gamma_2+\mu)e^{\gamma_1 t}+\frac{\mu\alpha\lambda_0}{\gamma_1\gamma_2}-\lambda_0\right]. \qquad (3.5)$$

константы определяются из начальных условий $\bar{S}(0)=S_0, \bar{k}(0)=k_0$.

В 3.2.2 определяются условия эффективности рекламы, и результаты сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1. Для модели с учетом расходов на рекламу в случае неограниченного страхового поля реклама эффективна, если выполнено хотя бы одно из условий

$$\lambda_1\left(a+\frac{c\lambda_\zeta-b\mu_\eta}{\mu}\right)>1, \quad \lambda_1 a>1+\frac{\mu}{\alpha}. \tag{3.8}$$

Расшифруем экономический смысл полученных условий эффективности рекламы. Рассматривая первое условие, перепишем его в виде

$$\lambda_1\alpha S\left(a+\frac{c\lambda_\zeta-b\mu_\eta}{\mu}\right)>\alpha S .$$

В последнем неравенстве слева

- первый сомножитель $\lambda_1\alpha S$ – это интенсивность дополнительного потока рисков, который возникает из-за действия рекламы,
- сомножитель $a+\left(c\lambda_\zeta-b\mu_\eta\right)/\mu$ – это средний доход, который получает компания от каждого застрахованного риска,

Таким образом, выражение в левой части неравенства определяет средние дополнительные доходы, которые получает компания за счет действия рекламы в единицу времени, выражение в правой части неравенства αS – это расходы на рекламу в единицу времени. Следовательно, экономический смысл первого условия можно сформулировать следующим образом: дополнительные доходы, полученные за счет действия рекламы, должны превышать расходы на проведение рекламной компании.

Смысл второго критерия менее очевиден. Для того, чтобы его получить, представим второе неравенство из (3.8) в следующем виде:

$$\alpha\lambda_1 aS>\alpha S+\mu S .$$

В этом случае левая часть неравенства $\alpha\lambda_1 aS$ – это дополнительный доход, которые получает компания за счет первоначальных взносов от рисков, привлеченных рекламой, справа αS – это, как и ранее, расходы на рекламу в единицу времени, а последнее слагаемое запишем в виде $\mu k(t)S/k(t)$ – это потери капитала, связанные с завершением срока договоров страхования в единицу времени. Следовательно, экономический смысл второго критерия эффективности рекламы можно сформулировать в следующем виде: дополнительный доход от первоначальных взносов, полученных за счет рекламы, больше чем расходы на ее проведение и потерь капитала, связанных с завершением срока действия некоторых договоров страхования.

Следствие. При выполнении первого условия (3.8) реклама будет эффективна при любом $\alpha>0$. Второе условие (3.8) может быть выполнено лишь при $\lambda_1 a>1$; оно даёт ограничение на величину параметра α, определяющего количество денег, выделяемых на рекламу. Имеем

$$\alpha>\frac{\mu}{\lambda_1 a-1}. \tag{3.11}$$

То есть вкладывать деньги в рекламу стоит лишь тогда, когда параметр, соответствующий доле денег на рекламу, превышает некоторую величину.

В 3.2.3 решается следующая задача оптимального управления: пусть страховая компания начинает свою работу в момент времени $t = 0$ и её цель провести рекламную программу таким образом, чтобы к концу рассматриваемого промежутка времени $[0,T]$ темп прироста её среднего капитал стал максимальным. Критерий оптимальности определяется следующим образом:

$$U = \frac{M\{S(T)\} - S_0}{\sqrt{D\{S(T)\}}} \Rightarrow \max.$$

Максимум определяется по виду $\alpha(t)$, $0 \le t \le T$ с учетом ограничений $0 \le \alpha(t) \le \alpha_0$; S_0– капитал компании в начальный момент времени. Заметим, что это лишь одна из постановок задач на оптимизацию рекламной деятельности. Для решения задачи рассматриваемый промежуток времени $[0,T]$ делится на три: $[0,T_0]$, $[T_0,T_1]$ и $[T_1,T]$, причем каждому из промежутков соответствует своё значение $\alpha(t)$:

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, \ 0 \le t \le T_0, \\ \alpha_0, T_0 \le t \le T_1, \\ 0, \ T_1 \le t \le T. \end{cases}$$

Система относительно средних капитала и числа рисков получена в 3.2.1 Система для ковариаций капитала и числа рисков выводится в данном параграфе и имеет следующий вид

$$\begin{gathered} \frac{dD\{S(t)\}}{dt} = 2\alpha(t)(a\lambda_1 - 1)D\{S(t)\} + \lambda_1 a_2 \alpha(t) M\{S(t)\} + \\ + 2(c\lambda_\zeta - b\mu_\eta)C_{Sk}(t) + (c_2\lambda_\zeta + b_2\mu_\eta)M\{k(t)\} + \lambda_0 a_2, \\ \frac{dD\{k(t)\}}{dt} = \lambda_1\alpha(t)M\{S(t)\} + \mu M\{k(t)\} - 2\mu D\{k(t)\} + 2\lambda_1\alpha(t)C_{Sk}\{t\} + \lambda_0, \\ \frac{dC_{Sk}(t)}{dt} = \lambda_1\alpha(t)D(S(t)) + (c\lambda_\zeta - b\mu_\eta)D\{k(t)\} + \\ + \lambda_1 a\alpha(t)M\{S(t)\} + \lambda_0 a + (\lambda_1 a\alpha(t) - \alpha(t) - \mu)C_{Sk}(t). \end{gathered} \tag{3.30}$$

Решение системы находится для каждого из промежутков, где параметр $\alpha(t)$ изменяет свои значения. На первом промежутке решение имеет вид

$$D_k(t,0) = C_1 e^{-2\mu t} + D_1 e^{-\mu t} + \frac{\lambda_0}{\mu}. \tag{3.35}$$

$$C_{Sk}(t,0) = (c\lambda_\zeta - b\mu_\eta)\left(-\frac{C_1}{\mu}e^{-2\mu t} + D_1 e^{-\mu t} t\right) + C_2 e^{-\mu t} + (c\lambda_\zeta - b\mu_\eta + a\mu)\frac{\lambda_0}{\mu^2}. \tag{3.36}$$

$$\begin{gathered} D_S(t,0) = \left[\frac{2\lambda_0}{\mu^2}(c\lambda_\zeta - b\mu_\eta)(c\lambda_\zeta - b\mu_\eta + a\mu) + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_0}{\mu}(c_2\lambda_\zeta + b_2\mu_\eta + a_2\mu)\right] t - \frac{2D_1}{\mu}(c\lambda_\zeta - b\mu_\eta)^2 \, te^{-\mu t} + \\ + e^{-\mu t}\left[\frac{-2C_2(c\lambda_\zeta - b\mu_\eta)}{\mu} - \frac{2D_1(c\lambda_\zeta - b\mu_\eta)^2}{\mu^2}\right] - \end{gathered}$$

$$-e^{-2\mu t}\left(\frac{C_1\left(c\lambda_\zeta - b\mu_\eta\right)^2}{\mu^2} - \frac{C_1\left(c\lambda_\zeta - b\mu_\eta\right)^2}{2\mu}\right) + C_3, \tag{3.37}$$

константы находятся из начальных условий $D_S(0{,}0)=0$, $D_k(0{,}0)=0$, $C_{Sk}(0{,}0)=0$. Далее для каждого из решений, соответствующих второму и третьему промежутку константы находятся из условий сшивания на границе $M\{S(T_0,0)\}=M\{S(T_0,\alpha)\}$, $M'\{S(T_0,0)\}=M'\{S(T_0,\alpha)\}$ (для решения на втором промежутке) и $D_S(T_1,\alpha)=D_S(T_1,0)$, $C_{Sk}(T_1,\alpha)=C_{Sk}(T_1,0)$,$D_k(T_1,\alpha)=D(T_1,0)$ (на третьем). Поэтому в выражениях для среднего значения и дисперсии капитала в момент времени T присутствуют константы, зависящие от моментов T_0 (включение рекламы) и T_1 (выключение рекламы). При выполнении условий $T_0>0$ и $T_0 \le T_1 < T$ условие максимума по по T_0 и T_1 имеет вид

$$\frac{\partial U(T_0,T_1)}{\partial T_0}=0,$$

$$\frac{\partial U(T_0,T_1)}{\partial T_1}=0.$$

Далее задача сводится к отысканию с помощью численных методов такого момента T_1, при котором функция $U(0,T_1)$ имеет максимум.

В параграфе 3.3 исследуется модель страховой компании с учетом отчислений на рекламу в случае ограниченного страхового поля. В 2.3.1 выводится и решается система относительно средних значений капитала и числа рисков аналогично случаю неограниченного страхового поля. В 2.3.2 рассматривается стационарный режим страховой компании. Находится точка покоя системы

$$S^* = \frac{\left[N\lambda_1\alpha\left(c\lambda_\zeta - b\mu_\eta + a\mu\right) - \alpha\left(\mu+\lambda_0\right)\right] + \sqrt{D}}{2\lambda_1\alpha^2},$$

$$k^* = N\frac{\alpha\left(\lambda_0-\mu\right) + N\lambda_1\alpha\left(c\lambda_\zeta - b\mu_\eta + a\mu\right) + \sqrt{D}}{\alpha\left(\lambda_0+\mu\right) + N\lambda_1\alpha\left(c\lambda_\zeta - b\mu_\eta + a\mu\right) + \sqrt{D}}, \tag{3.69}$$

в асимптотике при $N\to\infty$ определяются условия, при которых эта точка является устойчивой.

В 3.3.2 определяются условия эффективности рекламы (теорема 3.2)

Теорема 3.2. Для модели с учетом расходов на рекламу в случае ограниченного страхового поля реклама эффективна, если выполнено хотя бы одно из условий

$$N\lambda_1\left[a + \frac{c\lambda_\zeta - b\mu_\eta}{\mu}\right] > 1,$$

$$N\lambda_1 a > 1 + \frac{\mu}{\alpha}. \tag{3.77}$$

Во второй части диссертации (глава IV) предлагается и исследуется математическая модель работы фонда социального страхования при различных предположениях относительно способа страховых выплат. В отличие от обычных страховых компаний в задачу фонда входит не только оплата страховых случаев (временная нетрудоспособность, пособия по беременности и родам и т.д.), но и систематические выплаты по реализации региональных и отраслевых программ по охране здоровья работников, санаторно-курортному лечению, обслуживанию детей и т.д. Все это требует изменения классической модели работы страховой компании и решения задач оптимального в каком-то смысле управления капиталом такого фонда.

В параграфе 4.2 строится диффузионная аппроксимация деятельности фонда. Основной характеристикой состояния фонда является его капитал $S(t)$ в момент времени t. С этим капиталом происходят следующие изменения:

1. В фонд поступают средства от предприятий и организаций. Мы будем считать, что они поступают непрерывно во времени со скоростью c_0.

2. Фонд выделяет часть своих средств на социальные программы. Мы будем считать, что эти средства также выделяются непрерывно во времени, однако скорость их выделения $c^*(S)$ зависит от величины капитала S в данный момент времени.

Величина $c_0 - c^*(S)$ в дальнейшем обозначена как $c(S)$. Таким образом, $c(S)$ есть скорость изменения капитала за счет детерминированных расходов и она зависит от величины капитала S. Именно в наличии слагаемого $c^*(S)$ и зависимости $c(S)$ от S и заключается отличие данной модели от классической.

3. Происходят страховые выплаты, Будем считать, что поток страховых выплат является пуассоновским потоком постоянной интенсивности λ, и сами страховые выплаты ξ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения $F_\xi(t)$ и начальными моментами $M\{\xi\} = a_1$ и $M\{\xi^2\} = a_2$.

Кроме того, будем считать, что достижение порога $S(t) = 0$ не приводит к разорению фонда, и даже при $S(t) < 0$ он продолжает функционировать, только происходят задержки по страховым выплатам.

Заметим, что процесс $S(t)$ – марковский процесс. Обозначим

$$P(S,t) = \Pr\{S \le S(t) \le S + dS\}/dS .$$

Теорема 4.1. Если

1. плотность распределения вероятностей $P(S,t)$ дифференцируема по t,
2. произведение $c(S)P(S,t)$ дифференцируемо по S,
3. несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty P(S+u,t)dF_\xi(u)$ конечен,

то плотность распределения вероятностей $P(S,t)$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова следующего вида

$$\frac{\partial P(S,t)}{\partial t} = -\frac{\partial\{c(S)P(S,t)\}}{\partial S} - \lambda P(S,t) + \lambda\int\limits_0^\infty P(S+u,t)dF_\xi(u). \qquad (4.1)$$

Решение уравнения (4.1) в общем виде представляет определенные математические проблемы, но сделав ряд дополнительных предположений, его можно найти, воспользовавшись методом асимптотического анализа марковизируемых систем. Сформулируем эти дополнительные предположения, пусть процесс $S(t)$ принимает достаточно большие значения, тогда выберем бесконечно малый параметр $\varepsilon > 0$ таким образом, чтобы при $\varepsilon \to 0$ процесс $\varepsilon^2 S(t)$ не равен тождественно нулю.

$$c(S)=c_1\left(\varepsilon^2 S\right),\ t\varepsilon^2=\tau,\ S\varepsilon^2=x(\tau)+\varepsilon y,\ \frac{1}{\varepsilon}P(S,t)=\Pi(y,\tau,\varepsilon), \tag{4.3}$$

Теорема 4.2. Если

1. функция $c_1(x)$ дифференцируема,
2. существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Pi(y,\tau,\varepsilon)=\Pi(y,\tau)$,
3. функция $\Pi(y,\tau)$ дифференцируема по τ и дважды по y,

то функция $\Pi(y,\tau)$ удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка вида

$$\frac{\partial \Pi(y,\tau)}{\partial \tau}=-c_1(x(\tau))\frac{\partial\{y\Pi(y,\tau)\}}{\partial y}+\frac{\lambda a_2}{2}\frac{\partial^2\Pi(y,\tau)}{\partial y^2}. \tag{4.5}$$

При этом функция $x(\tau)$ определяется как решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau}=c_1(x(\tau))-\lambda a_1. \tag{4.6}$$

Из полученного уравнения (4.5) следует, что процесс

$$y(\tau,\varepsilon)=\frac{\varepsilon^2 S(t)-x(\tau)}{\varepsilon},$$

в пределе при $\varepsilon\to 0$ по распределению сходится к частному случаю процесса Орнштейна-Уленбека $y(\tau)$, удовлетворяющему стохастическому дифференциальному уравнению вида

$$dy(\tau)=c_1'(x(\tau))yd\tau+\sqrt{\lambda a_2}\,dw(\tau), \tag{4.8}$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Из уравнений (4.6) и (4.8) вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.3. Если функция $c_1(x)$ дважды дифференцируема, то случайный процесс

$$z(\tau)=x(\tau)+\varepsilon y(\tau) \tag{4.9}$$

удовлетворяет равенству вида

$$dz(\tau)=(c_1(z)-\lambda a_1)d\tau+\varepsilon\sqrt{\lambda a_2}\,dw(\tau)+\frac{\varepsilon^2}{2}R_2 d\tau, \tag{4.10}$$

где $R_2=-y^2c''(\varepsilon y\theta)$, $0\le\theta\le 1$.

Таким образом, показано, что процесс $S(t)$ можно аппроксимировать решением стохастического дифференциального уравнения

$$dS(t)=(c(S)-a_1\lambda)dt+\sqrt{a_2\lambda}\,dw(t). \tag{4.13}$$

Так как фонд не стремится к неограниченному накоплению капитала, то существует стационарное (финальное) распределение вероятностей $p(S)$ капитала S.

$$p(S)=C\cdot\exp\left(\frac{2}{a_2\lambda}\int(c(S)-a_1\lambda)dS\right), \tag{4.14}$$

где константа C находится из условия нормировки.

Далее в 4.2.3 находится плотность вероятностей величины капитала S при фиксированном релейном управлении. В 4.2.4 определяются вероятностные характеристики деятельности фонда при фиксированном управлении: вероятность неплатежеспособности фонда и вероятность выделения денег на социальные расходы – и предложена процедура, позволяющая определить параметры управления, которые обеспечивают заданные вероятностные характеристики работы фонда. В 4.2.5

и 4.2.6 аналогичная задача решается для релейно-гистерезисной процедуры управления капиталом.

В параграфе 4.3. получены точные формулы для плотности вероятностей капитала фонда в стационарном режиме и предложена процедура, позволяющая определить параметры управления, которые обеспечивают заданные вероятностные характеристики работы фонда, в предположении, что страховые выплаты распределены по экспоненциальному закону, когда поток страховых выплат является пуассоновским потоком постоянной интенсивности λ, и сами страховые выплаты ξ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с экспоненциальным распределением $p_{\xi}(x) = \exp\{-x/a\}/a, \quad x \geq 0$.

В параграфе 4.4. решена задача нахождения вероятностных характеристик капитала фонда при произвольном законе управления его капиталом, но в отсутствии гистерезиса при этом управлении.

Третья часть диссертации (главы V-VI) посвящена вопросам разработки программного комплекса, реализующего имитационное моделирование рассмотренных в предыдущих главах случайных процессов дискретно-событийным методом. В главе V методами объектно-ориентированного анализа и проектирования разработан каркас для реализации приложений имитационного моделирования, основанных на дискретно-событийном методе. В параграфе 5.1. проанализированы существующие подходы к реализации имитационных моделей, связанные с использованием специализированных пакетов имитационного моделирования или разработкой на основе универсального языка программирования. Выявлены достоинства и недостатки этих подходов, и, таким образом, обоснована возможность разработки соответствующего каркаса. В качестве средства документирования каркаса выбран UML.

В параграфе 5.2. рассмотрены элементы дискретно-событийной имитационной модели. В 5.2.1 приведено формальное описание метода моделирования, а в 5.2.2 выполнена функциональная декомпозиция элементов дискретно-событийной модели, проиллюстрированная соответствующей диаграммой состояний.

Параграф 5.3. посвящен вопросам применения стандартной трехслойной архитектуры в рамках приложения, реализующего дискретно-событийное имитационное моделирование. Взаимодействие логических уровней приложения строится с использованием типовых решений проектирования. Абстрактная фабрика используется в рамках каркаса для разделения логики моделирования и визуального представления модели, и обеспечивает четкое функциональное, и предметное разделение модулей программы. Разделение логики и представлений делает структуру приложения понятней, разгружает модули данных, снимает избыточную связность и повышает зацепление (шаблон распределения обязанностей высокое зацепление). Для обеспечения механизма передачи команд между слоями приложения используются связка типовых решений медиатор-одиночка и команда.

В параграфе 5.4. рассмотрены вопросы, связанные с проектированием уровня бизнес-логики в рамках архитектуры каркаса. В 5.4.1 приведено решение, позволяющее использовать диаграммы активности и диаграммы состояний UML для документирования метода представления событий с помощью графов, предложенного L.W. Schruben. Далее, в 5.4.2. рассмотрена задача организации моделей, имеющих сложную иерархическую структуру, с применением паттерна компоновщик. Для инициализации компоновщика используется типовое решение строитель. Приведены примеры организации объектов, формирующих модель, в рамках компоновщика. В 5.4.3 рассмотрена проблема взаимодействия с библиотечными пакетами, для решения которой предлагается использовать паттерны стратегия и адаптер. Наконец, в 5.4.4 описан порядок инициализации и разработки имитационной модели с помощью каркаса.

В главе VI дано краткое описание программного обеспечения имитационного моделирования работы страховых компаний для вариантов, рассмотренных в теоретической части диссертации. Это приложение, с одной стороны, иллюстрирует возможности каркаса для разработки приложений такого типа, а с другой – позволяет оценить полученные ранее теоретические результаты.

В процессе эксплуатации программного обеспечения были рассчитаны более ста моделей страховых компаний и проверены разнообразные комбинации параметров, при которых соблюдаются условия нормальной работы компании. Несмотря на разнообразие результатов, полученных при моделировании систем с различными наборами параметров и достаточное различие отдельных реализаций внутри одной и той же модели, результаты имитационного моделирования подтверждают аналитические формулы, полученные в предыдущих главах.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 68 работах, основными из которых, по мнению автора, являются следующие:

1. Глухова Е.В., Змеев О.А., Лившиц К.И. Математические модели страхования. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. 178 с.
2. Змеев О.А. Модель функционирования страховой компании при конечном числе возможных клиентов.// Известия вузов. Физика. № 4. 1999, с. 34-39.
3. Змеев О.А. Расчет характеристик времени разорения страховой компании для моделей с интенсивностью входного потока, зависящей от числа имеющихся рисков.// Известия вузов. Физика. №4. 2000, с. 10-16.
4. Змеев О.А. Математические модели функционирования страховой компании с учетом банковского процента.// Известия вузов. Физика. №1. 2001, с. 19-25.
5. Ахмедова Д.Д., Змеев О.А. Оптимизация расходов на рекламу при деятельности страховой компании.// Известия вузов. Физика, № 6. 2001, с. 3-7.
6. Змеев О.А. Построение переговорного множества при конкурентном взаимодействии двух страховых компаний.// Известия вузов. Физика, № 2. 2002, с. 24-28.
7. Ахмедова Д.Д., Змеев О.А., Терпугов А.Ф. Оптимизация деятельности страховой компании с учетом расходов на рекламу.// Вестник Том. гос. ун-та. № 275, 2002, с. 181-184.
8. Змеев О.А., Лезарев А.В. Шаблон объектного проектирования для реализации функциональности процесса моделирования в имитационных моделях систем массового обслуживания.// Вестник Том. гос. ун-та. № 275, 2002, с. 108-111.
9. Змеев О.А., Моисеев А.Н. Шаблон диаграммы компонентов информационной системы корпоративного уровня.// Вестник Том. гос. ун-та. № 275, 2002, с. 130-132.
10. Ахмедова Д.Д., Змеев О.А. Нахождение характеристик страховой компании с нестационарным входящим потоком и ограниченными числом рисков.// Вестник Том. гос. ун-та. Приложение №1 (I), 2002. С. 3-8.

11. Змеев О.А., Моисеев А.Н., Новиков Д.В. К вопросу проектирования уровня хранения в виде ООРДБ.// Вестник Том. гос. ун-та. Приложение №1 (II), 2002. С. 363-367.
12. Змеев О.А. Математическая модель фонда социального страхования с детерминированными расходами на социальные программы (диффузионное приближение).// Известия вузов. Физика, № 3. 2003, с. 83-87.
13. Змеев О.А. Математическая модель фонда социального страхования со случайными расходами на социальные программы (диффузионное приближение).// Известия вузов. Физика, № 3. 2003, с. 88-93.
14. Змеев О.А. Математическая модель деятельности фонда социального страхования при экспоненциальных страховых выплатах.// Вестник Том. гос. ун-та, 2003, № 280. С. 130-135.
15. Змеев О.А., Моисеев А.Н. Сравнительный анализ некоторых методов O-R-преобразования.// Вестник Том. гос. ун-та, 2003, № 280. С. 263-271.
16. Вальц О.В., Змеев О.А. Диффузионная аппроксимация модели фонда социального страхования с релейно-гистерезисным управлением капитала // Известия вузов. Физика, 2004. № 2. - С. 26-31.
17. Змеев О.А. Деятельность фонда социального страхования при релейно-гистерезисном управлении капиталом.// Математическое моделирование, 2004, т.16, № 2. -С.43-53.
18. Вальц О.В., Змеев О.А. Исследование модели фонда социального страхования.// Обозрение прикладной и промышленной математики. Т 11. Вып. 2. 2004. – С. 311-312.
19. Вальц О.В., Змеев О.А. Математическая модель деятельности фонда социального страхования при экспоненциальных страховых выплатах и случайными расходами на социальные программы // Вестник Томского государственного университета. № 284, 2004. С. 37-41.
20. Войтиков К.Ю., Змеев О.А., Моисеев А.Н., Якушев А.А. Архитектура надстраиваемых приложений клиент/сервер с обобщенным протоколом передачи данных // Вестник Томского государственного университета. № 284, 2004. С. 169-173.
21. Змеев О.А., Приступа А.В. Разработка объектно-ориентированного программного комплекса имитационного моделирования систем массового обслуживания // Вестник Томского государственного университета. № 284, 2004. С. 174-176.
22. Змеев О.А. Модель функционирования страховой компании при интенсивности входящего потока, зависящего от числа клиентов // Математическое моделирование. Кибернетика. Информатика. Сб. статей. – Томск: Изд–во Том. ун–та, 1999. – С. 67-73.
23. Змеев О.А. Определение вероятности разорения страховой компании для модели с интенсивностью входящего потока, зависящей от числа клиентов // Статистическая обработка данных и управление в сложных системах. Сб. статей.– Томск: Изд–во Том. ун–та, 1999. – Вып. 1. – С. 57-66.
24. Змеев О.А. Определение вероятности разорения страховой компании для модели с конечным числом возможных клиентов // Статистическая обработка данных и управление в сложных системах. Сб. статей.– Томск: Изд–во Том. ун–та, 1999. – Вып. 1. – С. 66-75.

25. Змеев О.А., Терпугов А.Ф. Модель страховой компании с ограничением на число клиентов с учетом банковского процента // Математическое моделирование экономических систем и процессов. Всероссийская научно-практическая конференция. Тезисы докладов. Чебоксары. 2000, с 60-63.
26. Змеев О.А., Змеева Е.Е. Определение вероятностных характеристик времени разорения страховой компании при условии, что оно произойдет // Статистическая обработка данных и управление в сложных системах. Сб. статей.– Томск: Изд–во Том. ун–та, 2000. – Вып. 2. – С. 70-78.
27. Змеев О.А., Терпугов А.Ф. Расчет характеристик времени разорения страховой компании для модели с конечным числом возможных рисков // Экономика, технология, предпринимательство. Сб. статей. Томск. 2000, с. 60-67.
28. Змеев О.А., Терпугов А.Ф. Математическая модель функционирования страховой компании с учетом банковского процента.// Методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике. Международная научно-практическая конференция. Часть 3. Тезисы докладов. Новочеркасск. 2001, с. 33-36.
29. Ахмедова Д.Д., Змеев О.А. Модель функционирования страховой компании с учетом расходов на рекламу при ограниченном числе клиентов // Статистическая обработка данных и управление в сложных системах. Сб. статей.– Томск: Изд–во Том. ун–та, 2001. – Вып. 3. – С. 3–14.
30. Змеев О.А. Нестационарный режим для математической модели функционирования страховой компании с интенсивностью входного потока, зависящей от числа клиентов.// Статистическая обработка данных и управление в сложных системах. Сб. статей.– Томск: Изд–во Том. ун–та, 2001. – Вып. 3. – С. 45-53.
31. Войтиков К.Ю., Змеев О.А., Моисеев А.Н. Реализация классификаторов на сервере приложений в трехзвенной архитектуре «клиент/сервер» // «Новые информационные технологии в университетском образовании». Тезисы международной научно-методической конференции. Кемерово, 2002, с. 120-122.
32. Ахмедова Д.Д., Змеев О.А. Исследование математической модели страховой компании при нестационарном потоке рисков // Математические методы в финансах и экономике. Материалы второй международной конференции «Проблемы актуарной и финансовой математики». Минск, 2002, с. 5-10.
33. Змеев О.А., Масяйкин С.А. Построение переговорного множества при конкурентном взаимодействии двух страховых компаний // Математические методы в финансах и экономике. Материалы второй международной конференции «Проблемы актуарной и финансовой математики». Минск, 2002, с. 20-24.
34. Ахмедова Д.Д., Змеев О.А. Нахождение характеристик работы страховой компании с нестационарным входящим потоком клиентов // Труды I Всероссийской ФАМ конференции. Ч. II. Красноярск, 2002, с. 20-27.
35. Ахмедова Д.Д., Змеев О.А. Нахождение характеристик капитала страховой компании с нестационарным входящим потоком, параметр которого случайная функция.// Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование», Анжеро-Судженск, 2002, с 23-26.
36. Змеев О.А., Лезарев А.В. Функциональные требования для систем имитационного моделирования систем массового обслуживания.// Материалы Всерос-

сийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование», Анжеро-Судженск, 2002, с 128-130.

37. Змеев О.А., Моисеев А.Н., Новиков Д.В. Решение проблемы переполнения «родительских» таблиц в ООРБД.// Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование», Анжеро-Судженск, 2002, с 130-131.
38. Ахмедова Д.Д., Змеев О.А. Математическая модель функционирования страховой компании с входящими рисками в виде пуассоновского потока событий с переменной интенсивности.// Обработка данных и управление в сложных системах. Сб. статей.– Томск: Изд–во Том. ун–та, 2002. – Вып. 4. – С. 3–12.
39. Войтиков К.Ю., Змеев О.А., Моисеев А.Н. Объектный подход к проблеме проектирования подсистемы нормативно-справочной информации.// Обработка данных и управление в сложных системах. Сб. статей.– Томск: Изд–во Том. ун–та, 2002. – Вып. 4. – С. 13-20.
40. Змеев О.А. Построение переговорного множества при конкурентном взаимодействии двух страховых компаний.// Обработка данных и управление в сложных системах. Сб. статей.– Томск: Изд–во Том. ун–та, 2002. – Вып. 4. – С. 33-47.
41. Змеев О.А., Моисеев А.Н., Новиков Д.В. Применение метаданных при проектировании уровня хранения в системах, использующих ООРБД // Обработка данных и управление в сложных системах. Сб. статей.– Томск: Изд–во Том. ун–та, 2002. – Вып. 4. – С. 48-53.
42. Войтиков К.Ю., Змеев О.А., Моисеев А.Н. К вопросу о реализации классификатора в объектно-ориентированной информационной системе // Вестник Кем. гос. ун-та № 2 (10). Кемерово. 2002, с. 167-177.
43. Войтиков К.Ю., Змеев О.А., Моисеев А.Н. Основные функциональные требования к подсистеме «Брокер объектных запросов» в рамках унифицированного процесса разработки программного обеспечения.// Обработка данных и управление в сложных системах. Сб. статей.– Томск: Изд–во Том. ун–та, 2003. – Вып. 5. – С. 3–13.
44. Змеев О.А. Математическая модель деятельности фонда социального страхования с детерминированными расходами на социальные программы при релейно-гистерезисном управлении капиталом.// Обработка данных и управление в сложных системах. Сб. статей.– Томск: Изд–во Том. ун–та, 2003. – Вып. 5. – С. 42-56.
45. Ахмедова Д.Д., Змеев О.А. Характеристики числа рисков и капитала страховой компании при зависимости среднего первоначального взноса и средних страховых выплат от времени.// Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Наука и практика: диалоги нового века» Часть 3. Томск: Изд-во «Твердыня», 2003. С. 23-24.
46. Змеев О.А., Моисеев А.Н., Якушев А.А. Каркас брокера распределенной объектной базы данных // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Наука и практика: диалоги нового века» Часть 3. Томск: Изд-во «Твердыня», 2003. С. 90-92.
47. Змеев О.А., Приступа А.В. Классификация коммерческих систем имитационного моделирования // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Наука и практика: диалоги нового века» Часть 3. Томск: Изд-во «Твердыня», 2003. С. 93-95

48. Ахмедова Д.Д., Змеев О.А. Оптимальное управление первоначальным страховым взносом при деятельности страховой компании // Труды II Всероссийской ФАМ конференции. Ч. II. Красноярск, 2002, с. 21-24.
49. Змеев О.А. Диффузионное приближение в математических моделях фонда социального страхования // Труды II Всероссийской ФАМ конференции. Ч. II. Красноярск, 2002, с. 80-85.
50. Змеев О.А., Приступа А.В. Применение паттернов проектирования при построении систем имитационного моделирования // Материалы VIII Всеросс. научн.-практ. конф. «Научное творчество молодежи». Томск: Изд-во ТГУ, 2004. С. 34-36.
51. Змеев О.А., Приступа А.В. Диаграммы состояния UML как способ представления графа событий имитационной модели системы массового обслуживания.// Обработка данных и управление в сложных системах. Вып. 6. - Томск: Изд-во ТГУ, 2004. - С. 76-81.
52. Pristupa A. V., Zmeyev O. A. 8th Korea - Russia International Symposium on Science and Technology KORUS 2004, Tomsk, RUSSIA, June 26 – July 3, 2004, Vol. 1. P. 141-144.