ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕГОВОРНОГО МНОЖЕСТВА ПРИ КОНКУРЕНТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТРЕХ СТРАХОВЫХ КОМПАНИЙ

О.А. ЗМЕЕВ, С.А. МАСЯЙКИН

Введение

В настоящее время большой интерес вызывают математические модели так называемой актуарной математики, изучающей различные аспекты страхового дела. В числе этих проблем находится и вопрос о математической модели страховой компании в целом [1, 2].

Однако многие аспекты деятельности страховых компаний в рамках этих моделей остаются неизученными. К ним, в частности, относятся и вопросы конкурентного взаимодействия страховых компаний на рынке, по своей тематике изучаемые в теории игр [3, 4]. В данной работе рассматриваются вопросы конкурентного взаимодействия двух компаний, что дает так называемую кооперативную игру с ненулевой суммой.

Модель страховой компании

Ниже используется несколько упрощенная модель страховой компании, предложенная и изученная в работах О.А. Змеева [5, 6]. В ней считается, что в каждый момент времени t состояние компании характеризуется двумя величинами – числом застрахованных рисков $N(t)$ и капиталом компании $U(t)$. Функционирование компании моделируется следующими процессами:

1. В компанию поступает новый поток рисков интенсивности λ. Клиенты, страхующие эти риски, приносят страховые взносы, являющиеся случайными величинами с математическим ожиданием a.

2. Время страхования некоторых рисков заканчивается; считается, что этот процесс имеет интенсивность μ, так что если число рисков есть $N(t)$, то интенсивность ухода равна $\mu N(t)$.

3. С интенсивностью $\lambda_1 N(t)$ идут повторные страховые взносы, которые считаются случайными величинами с математическим ожиданием b.

4. Наконец, с интенсивностью $\mu_1 N(t)$ наступают страховые случаи, выплаты по которым являются случайными величинами с математическим ожиданием c.

В этих предположениях в [4, 5] показано, что математическое ожидание капитала компании $U(t)$ имеет вид $M\{U(t)\} = U_0 + \frac{\lambda}{\mu}(a\mu + b\lambda_1 - c\mu_1)t$. Заметим, что в этом случае скорость роста капитала K равна

$$K = \frac{dM\{U(t)\}}{dt} = \lambda\left(a + \frac{b\lambda_1 - c\mu_1}{\mu}\right). \tag{1}$$

В дальнейшем комбинацию $\frac{b\lambda_1 - c\mu_1}{\mu}$ будем обозначать через δ.

Взаимодействие трех компаний

Пусть теперь на рынке страховых услуг имеются три страховые компании, различающиеся между собой параметрами a и δ, равными a_1, δ_1 для первой компании, a_2, δ_2 – для второй и a_3, δ_3 – для третьей компании соответственно.

Примем следующую модель взаимодействия трех страховых компаний. Будем считать, что существует некоторый общий поток рисков интенсивности λ_0, которая зависит от величин страховых взносов a_1, a_2, a_3, то есть $\lambda_0 = f(a_1, a_2, a_3)$. Этот поток разделяется на три части, так что в первую компанию поступает поток рисков интенсивности λ_1, во вторую – поток интенсивности λ_2, а в третью – поток интенсивности $\lambda_3 = \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2$ Довольно естественно считать, что интенсивности этих потоков обратно пропорциональны величине страховых взносов: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{a_2}{a_1}$ и $\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{a_3}{a_1}$. Тогда

$$\lambda_1 = \frac{a_2 a_3}{a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1} f(a_1, a_2, a_3),$$

$$\lambda_2 = \frac{a_1 a_3}{a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1} f(a_1, a_2, a_3), \ \lambda_3 = \frac{a_1 a_2}{a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1} f(a_1, a_2, a_3). \quad (2)$$

Вид зависимости $f(a_1, a_2, a_3)$ от a_1, a_2, a_3 определить достаточно сложно. В настоящей работе мы будем считать, что $f(a_1, a_2, a_3)$ зависит лишь от некоторого параметра p, который, в свою очередь, зависит от a_1, a_2 и a_3 так, что $p = p(a_1, a_2, a_3)$. Этот параметр определяет некоторую «среднюю» цену страхования, которую создает в своем воображении потенциальный клиент. Относительно вида функции $f(p)$ естественно выдвинуть следующие предположения:

1. $f(0) < +\infty$.
2. $f(p)$ монотонно убывает с ростом p.
3. $\lim\limits_{p \to +\infty} pf(p) = 0$.

Что касается самой зависимости $p(a_1, a_2, a_3)$, то к ней можно предъявить следующие достаточно естественные требования:

1. Пусть a_3 фиксировано, тогда если $a_1 \to +\infty$ и $a_2 \to +\infty$, то p должно равняться a_3, так как в этих условиях все определяется именно величиной a_3 и клиент просто проигнорирует первые две компании. Таким образом, должно быть $\lim\limits_{\substack{a_1 \to \infty \\ a_2 \to \infty}} p(a_1, a_2, a_3) = a_3$.

2. С уменьшением a_1 $p(a_1, a_2, a_3)$ также должно монотонно убывать, так как у страхующихся появляется возможность выбора. Поэтому должно быть $\frac{\partial p(a_1, a_2, a_3)}{\partial a_1} > 0$.

3. При $a_1 \to 0$ $p(a_1, a_2, a_3)$ также должно стремиться к нулю, так как в этом случае страховаться будут все потенциальные клиенты: $\lim\limits_{a_1 \to 0} p(a_1, a_2, a_3) = 0$.

4. Наконец, $p(a_1, a_2, a_3)$ также должно быть симметричной функцией от a_1, a_2 и a_3, то есть $p(a_1, a_2, a_3) = p(a_2, a_1, a_3) = p(a_2, a_3, a_1)$.

По-видимому, достаточно правдоподобной является следующая зависимость p от a_1, a_2, a_3: $\frac{1}{p^v} = \frac{1}{a_1^{\ v}} + \frac{1}{a_2^{\ v}} + \frac{1}{a_3^{\ v}}$, или же, что то же самое,

$$p = \frac{a_1 a_2 a_3}{\left(a_1^{\ v} + a_2^{\ v} + a_3^{\ v}\right)^{1/v}},$$

удовлетворяющая всем этим условиям и напоминающая среднее геометрическое с некоторым параметром $v > 0$. Тогда скорость возрастания капитала K_1, K_2, K_3 для первой, второй и третьей компании соответственно согласно формулам (1) и (2) будет иметь вид

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{a_2 a_3}{a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1}(a_1 + \delta_1) f(p), \\ K_2 = \dfrac{a_1 a_3}{a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1}(a_2 + \delta_2) f(p), \\ K_3 = \dfrac{a_1 a_2}{a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1}(a_3 + \delta_3) f(p). \end{cases} \tag{3}$$

Построение переговорного множества

Основным в теории кооперативных игр трех лиц с ненулевой суммой является понятие переговорного множества, так как именно на этом множестве идет торг о совместной стратегии. Поэтому рассмотрим вопрос о построении этого множества в рамках предложенных моделей.

Каждой паре значений (a_1, a_2, a_3) в пространстве (K_1, K_2, K_3) соответствует некоторая точка, совокупность которых образует некоторую область K. Для построения этой области необходимо построить ее границу. Сама граница области K состоит из отдельных кусков. Первый кусок границы получится, если в уравнениях (3) зафиксировать a_1, a_2 и устремить $a_3 \to \infty$. В этом случае

$$p = \frac{a_1 a_2}{\left(a_1{}^v + a_2{}^v\right)^{1/v}},$$

а формула (3) примет следующий вид:

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{a_2}{a_1 + a_2}(a_1 + \delta_1) f(p), \\ K_2 = \dfrac{a_1}{a_1 + a_2}(a_2 + \delta_2) f(p), \\ K_3 = \dfrac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} f(p). \end{cases} \tag{4}$$

Второй кусок границы получится, если в уравнениях (3) зафиксировать a_1, a_3 и устремить $a_2 \to \infty$, тогда $p = \dfrac{a_1 a_3}{\left(a_1{}^v + a_3{}^v\right)^{1/v}}$, а формула (3) примет вид

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{a_3}{a_1 + a_3}(a_1 + \delta_1) f(p), \\ K_2 = \dfrac{a_1 a_3}{a_1 + a_3} f(p), \\ K_3 = \dfrac{a_1}{a_1 + a_3}(a_3 + \delta_3) f(p). \end{cases} \tag{5}$$

Чтобы получить третий кусок границы, нужно в уравнениях (3) зафиксировать a_2, a_3 и устремить $a_1 \to \infty$, тогда $p = \dfrac{a_2 a_3}{\left(a_2{}^v + a_3{}^v\right)^{1/v}}$ и

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{a_2 a_3}{a_2 + a_3} f(p), \\ K_2 = \dfrac{a_3}{a_2 + a_3}(a_2 + \delta_2) f(p), \\ K_3 = \dfrac{a_2}{a_2 + a_3}(a_3 + \delta_3) f(p). \end{cases} \tag{6}$$

Формулы (5), (6), (7) задают параметрически три поверхности в пространстве, которые являются границами области (K_1, K_2, K_3). Ориентировочно эти границы определяются следующими соображениями: поскольку при $p \to \infty$ произведение $pf(p) \to 0$, то все поверхности ограничены на плоскости. При возрастании a_1, a_2, a_3 сначала K_1, K_2, K_3 возрастают, а затем при $a_1 \to \infty$, $a_2 \to \infty$, $a_3 \to \infty$ значения $K_1 \to 0$, $K_2 \to 0$ и $K_3 \to 0$ и все три поверхности стягиваются в точку $(0,0,0)$.

Кроме того, легко установить, что поверхности, определяемые уравнениями (4) и (5), имеют общую границу. Для этого в уравнении (4) зафиксируем a_1 и устремим $a_2 \to \infty$, тогда $K_1 \to (a_1 + \delta_1) f(a_1)$, $K_2 \to a_1 f(a_1)$, $K_3 \to a_1 f(a_1)$. В уравнениях (5) также зафиксируем a_1 и устремим $a_3 \to \infty$, тогда $K_1 \to (a_1 + \delta_1) f(a_1)$, $K_2 \to a_1 f(a_1)$, $K_3 \to a_1 f(a_1)$, значит, поверхности, определяемые уравнениями (4), (5), имеют общую границу, которая представляет собой кривую в пространстве, задаваемую следующими параметрическими уравнениями: $K_1 = (a_1 + \delta_1) f(a_1)$, $K_2 = a_1 f(a_1)$, $K_3 = a_1 f(a_1)$.

Если в уравнениях (4) и (6) зафиксировать a_2 и в уравнении (4) устремить $a_1 \to \infty$, а в уравнении (6) $a_3 \to \infty$, то получится, что поверхности (4), (6) имеют общую границу – кривую, задаваемую следующими параметрическими уравнениями: $K_1 = a_2 f(a_2)$, $K_2 = (a_2 + \delta_2) f(a_2)$, $K_3 = a_2 f(a_2)$.

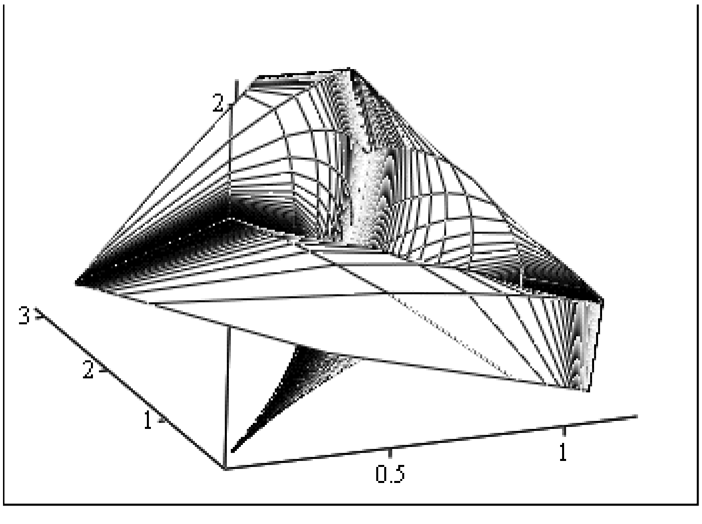

Рис. 1

Аналогично можно получить, что поверхности (5), (6) имеют общую границу – кривую, заданную уравнениями $K_1 = a_3 f(a_3)$, $K_2 = a_3 f(a_3)$, $K_3 = (a_3 + \delta_3) f(a_3)$.

Если во всех уравнениях, задающих три кривые, устремить a_1, a_2, a_3 к бесконечности, тогда K_1, K_2, K_3 будут стремиться к нулю и все три кривые сойдутся в точке $(0,0,0)$. В результате границы имеют приблизительно вид, приведенный на рис. 1.

Асимметрия картины получается из-за различия δ_1, δ_2, δ_3 Получающийся провал заполняется другими точками, построение которых мы сейчас и рассмотрим.

Частный случай

Изучим сначала случай, когда $v = 1$. Для $v = 1$ $p = \dfrac{a_1 a_2 a_3}{a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_1 a_3}$. В уравнениях (3) умножим K_1 на $\delta_2 \delta_3$, K_2 умножим на $\delta_1 \delta_3$, а K_3 умножим на $\delta_1 \delta_2$ и просуммируем. Учитывая, что $p = \dfrac{a_1 a_2 a_3}{a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_1 a_3}$, после некоторых упрощений получим

$$K_1 \delta_2 \delta_3 + K_2 \delta_1 \delta_3 + K_3 \delta_1 \delta_2 = [p(\delta_1 \delta_2 + \delta_2 \delta_3 + \delta_1 \delta_3) + \delta_1 \delta_2 \delta_3] f(p), \quad (7)$$

то есть граничные точки рис. 1, соответствующие одному значению p, заполняются поверхностью (7). При изменении p эта поверхность смещается параллельно самой себе и ее крайнее положение получается из условия $[p(\delta_1 \delta_2 + \delta_2 \delta_3 + \delta_1 \delta_3) + \delta_1 \delta_2 \delta_3] f(p) \Rightarrow \max$, что приводит к уравнению для p, определяющему это крайнее положение

$$(\delta_1 \delta_2 + \delta_2 \delta_3 + \delta_1 \delta_3) f(p) + (p(\delta_1 \delta_2 + \delta_2 \delta_3 + \delta_1 \delta_3) + \delta_1 \delta_2 \delta_3) f'(p) = 0. \quad (8)$$

Докажем, что эта граничная поверхность касается построенных выше внешних границ. Рассмотрим границу, задаваемую уравнениями (4):

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{a_2}{a_1 + a_2}(a_1 + \delta_1) f(p), \\ K_2 = \dfrac{a_1}{a_1 + a_2}(a_2 + \delta_2) f(p), \\ K_3 = \dfrac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} f(p). \end{cases}$$

Поскольку при $v = 1$ и $a_3 \to \infty$ $p \to \dfrac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$, то уравнения (4) после некоторых упрощений можно переписать так:

$$\begin{cases} \dfrac{K_1\delta_2 + K_2\delta_1}{\delta_1\delta_2} = pf(p)\dfrac{\delta_2 + \delta_1}{\delta_1\delta_2} + f(p), \\ K_3 = pf(p). \end{cases} \tag{9}$$

Дифференцируя уравнения (9), получим
$\delta_2 dK_1 + \delta_1 dK_2 = (f(p) + pf'(p))(\delta_2 + \delta_1)dp + \delta_1\delta_2 f'(p)dp$, $dK_3 = (f(p) + pf'(p))dp$,
так что на этой границе

$$\delta_2 \frac{dK_1}{dK_3} + \delta_1 \frac{dK_2}{dK_3} = \delta_2 + \delta_1 + \delta_1\delta_2 \frac{f'(p)}{f(p) + pf'(p)} . \tag{10}$$

С другой стороны, при фиксированном p наши поверхности имеют уравнение

$$K_1\delta_2\delta_3 + K_2\delta_1\delta_3 + K_3\delta_1\delta_2 = \text{const}, \tag{11}$$

откуда для них

$$dK_1\delta_2\delta_3 + dK_2\delta_1\delta_3 + dK_3\delta_1\delta_2 = 0 \tag{12}$$

или, если разделить на dK_3,

$$\frac{dK_1}{dK_3}\delta_2\delta_3 + \frac{dK_2}{dK_3}\delta_1\delta_3 + \delta_1\delta_2 = 0. \tag{13}$$

Найдем p, соответствующее точке касания границы и поверхности, оно получается, если $\delta_2 \dfrac{dK_1}{dK_3} + \delta_1 \dfrac{dK_2}{dK_3}$, определяемое уравнением (10), подставить в уравнение (13)

$$\left(\delta_2 + \delta_1 + \delta_1\delta_2 \frac{f'(p)}{f(p) + pf'(p)}\right)\delta_3 + \delta_1\delta_2 = 0 \qquad (14)$$

или, раскрыв скобки и сделав некоторые упрощения,

$$(\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_3)f(p) + (\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_3)pf'(p) + \delta_1\delta_2\delta_3 f'(p) = 0. \qquad (15)$$

Мы снова получаем уравнение (8), то самое, которое определяет значение параметра p, задающее крайнюю плоскость. Аналогично доказывается, что крайняя плоскость касается и двух других границ, задаваемых уравнениями (5) и (6).

Таким образом, окончательно для $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 2$, $\delta_3 = 3$ граница области K имеет вид, как это показано на рис. 2. На этой построенной границе и определяется переговорное множество.

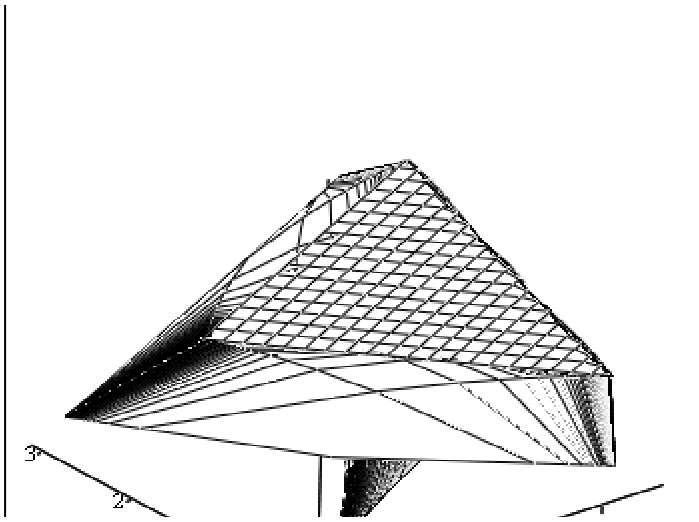

Рис. 2

Общий случай

Теперь рассмотрим общий случай, когда параметр $v \neq 1$. Введем две новые переменные: $q_1 = \dfrac{a_1}{a_2}$ и $q_2 = \dfrac{a_1}{a_3}$, тогда $p = \dfrac{a_1}{\left(1 + q_1^{\,v} + q_2^{\,v}\right)^{1/v}}$, $a_2 = \dfrac{a_1}{q_1}$, $a_3 = \dfrac{a_1}{q_3}$, а уравнения (3) можно будет переписать следующим образом:

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{1}{1+q_1+q_2}(a_1+\delta_1)f\left(\dfrac{a_1}{\left(1+q_1^{\ v}+q_2^{\ v}\right)^{1/v}}\right), \\ K_2 = \dfrac{q_1}{1+q_1+q_2}\left(\dfrac{a_1}{q_1}+\delta_2\right)f\left(\dfrac{a_1}{\left(1+q_1^{\ v}+q_2^{\ v}\right)^{1/v}}\right), \\ K_3 = \dfrac{q_2}{1+q_1+q_2}\left(\dfrac{a_1}{q_2}+\delta_3\right)f\left(\dfrac{a_1}{\left(1+q_1^{\ v}+q_2^{\ v}\right)^{1/v}}\right). \end{cases} \tag{16}$$

Уравнения (16) можно рассматривать как параметрические уравнения, задающие при фиксированном a_1 поверхность в пространстве, различные значения параметра a_1 определяют семейство поверхностей в пространстве. Чтобы получить последний кусок границы области K, нужно построить огибающую семейства поверхностей, задаваемых уравнениями (16). Для получения уравнения, определяющего огибающую, нужно продифференцировать K_3 из (16) по a_1 [7]:

$$\frac{dK_3}{da_1} = \frac{\partial K_3}{\partial a_1} + \frac{\partial K_3}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial a_1} + \frac{\partial K_3}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial a_1} = 0\,. \tag{17}$$

Частные производные $\dfrac{\partial K_3}{\partial a_1}$, $\dfrac{\partial K_3}{\partial q_1}$, $\dfrac{\partial K_3}{\partial q_1}$ известны, остается найти частные производные $\dfrac{\partial q_1}{\partial a_1}$ и $\dfrac{\partial q_2}{\partial a_1}$, они получаются как решение системы уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial K_1}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial a_1} + \frac{\partial K_1}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial a_1} = -\frac{\partial K_1}{\partial a_1}, \\ &\frac{\partial K_2}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial a_1} + \frac{\partial K_2}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial a_1} = -\frac{\partial K_2}{\partial a_1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Решение уравнения (17) возможно численно, задавая значения q_1 и q_2, можно получить a_1. Зная a_1, q_1, q_2, легко получить a_2 и a_3. Подстановка значений a_1, a_2, a_3 в уравнения (3) определяет точку (K_1, K_2, K_3) на огибающей.

Эта построенная огибающая и три куска границы, задаваемые формулами (4), (5), (6), и являются границей области K, на которой и определяется переговорное множество.

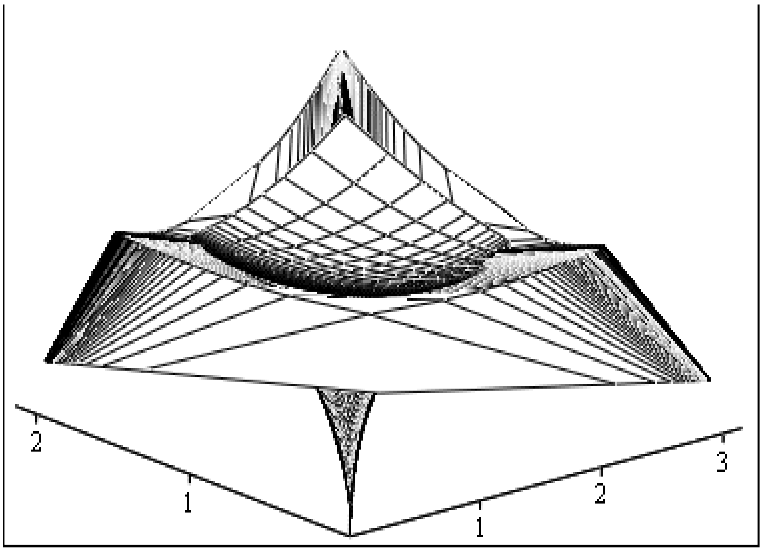

Рис. 3

В качестве примера рассмотрим случай, когда $f(p)=\dfrac{1}{1+p^2}$, $v=2$, $\delta_1=1$, $\delta_2=2$, $\delta_3=3$. В этом случае граница области K выглядит, как это показано на рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штрауб Э. Актуарная математика имущественного страхования. – Цюрих, 1998. – 148с.
2. Panjer H.H., Willmot G.E. Insurance Risk Models. – Society of Actuaries, 1992. – 442 p.
3. Льюс Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 642 с.
4. Терпугов А.Ф. Экономико–математические модели. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999. – 185 с.
5. Змеев О.А. Модель функционирования страховой компании при конечном числе возможных клиентов // Известия вузов. Физика. – 1999. – №4. – С. 34–39.
6. Змеев О.А. Модель функционирования страховой компании при интенсивности входящего потока, зависящего от числа клиентов //Математическое моделирование. Кибернетика. Информатика. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999. – С. 67–72.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1966. – Т. I. – 608 с.